大學叢書

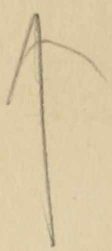
# 微分方程初步

費利伯 著
斐禮伯 譯

STORAGE ITEM
ASIAN

LPA - C64E
UBC LIBRARY

務印書館發行



大 學 叢 書

# 微分方程初步

# 大學叢書委員會

## 委　員


丁燮林君　王世杰君　王雲五君
任鴻雋君　朱經農君　朱家驊君
李四光君　李建勛君　李書華君
李書田君　李聖五君　李權時君
余青松君　何炳松君　辛樹幟君
吳澤霖君　吳經熊君　周　仁君
周昌壽君　秉　志君　竺可楨君
胡　適君　胡庶華君　姜立夫君
翁之龍君　翁文灝君　馬君武君
馬寅初君　孫貴定君　徐誦明君
唐　鉞君　郭任遠君　陶孟和君
陳裕光君　曹惠羣君　張伯苓君
梅貽琦君　程天放君　程演生君
馮友蘭君　傅斯年君　傅運森君
鄒　魯君　鄭貞文君　鄭振鐸君
劉秉麟君　劉湛恩君　黎照寰君
蔡元培君　蔣夢麟君　歐元懷君
顏任光君　顏福慶君　羅家倫君
顧頡剛君

大學叢書

# 微分方程初步

費利伯著
斐禮伯譯

商務印書館發行

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of British Columbia Library

http://www.archive.org/details/weifenfangchengc00ubc

# 目　錄

## 第一章　一級微分方程式　離變數法

1. 定義……………………………………………………………1
2. 微分方程式之解…………………………………………………2
3. 離變數法 ……………………………………………………4
4. 微分方程式之解的形式…………………………………………5
習題…………………………………………………………………8
5. 初級方程式之圖示 ……………………………………………8
6. 幾何問題 ……………………………………………………10
7. 常數之決定法…………………………………………………12
8. 含有積分的方程式 ……………………………………………14
問題…………………………………………………………………16
9. 變化率…………………………………………………………18
10. 定限積分法 …………………………………………………19
11. 流射孔之水流 ………………………………………………20
12. 連續性方程式 ………………………………………………21
13. 熱之流動 ……………………………………………………23
14. 二次作用 ……………………………………………………24

15. 微分之相關 ……26
問題 ……30

## 第二章 其他初級方程式

16. 適合微分方程式 ……37
17. 積分因數 ……39
18. 平直微分方程式 ……40
19. 可簡化爲平直式之方程式 ……42
20. 齊次方程式 ……43
21. 高次方程式 ……46
22. 變數之改易 ……48
23. 聯立方程式 ……50
習題 ……51
問題 ……53

## 第三章 二級方程式之特類

24. 通論 ……58
25. 直接可解之方程式 ……59
26. 非含 $y$ 之方程式 ……60
27. 非含 $x$ 之方程式 ……61
28. 二級平直方程式 ……62
習題 ……64

29. 橫梁之彎曲……65
30. 纜之平衡……69
31. 質點沿直線運動……70
32. 複系之運動……72
33. 平面上之運動……74
問題……79

## 第四章　常係數平直微分方程式

34. $n$級方程式……84
35. 常係數平直方程式……85
36. 右端爲零之方程式……87
37. 虛根……89
38. 右端爲$x$之函數的方程式……92
39. 未定係數法……94
40. 聯立平直方程式……98
習題……99
41. 繞定軸之旋轉……103
42. 振動系……104
問題……107
答案……111
中西名詞索引……121

# 微分方程初步

## 第一章

### 一級微分方程式　離變數法

**1. 定義.**

在吾人研究經驗中,知求變數變化間之關係較易於求變數自身間之關係.用包含微分及微係數之方程式,以表明此種關係,卽謂之微分方程式:

例 $$(x^2+y^2)dx+2xydy=0 \cdots\cdots (1a)$$

又 $$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=2 \cdots\cdots (1b)$$

設方程式中,只含有全微分(total differentials)或全微係數者,則謂之全微分方程式(ordinary differential equation),如 (1$a$)(1$b$) 是也.

設方程式中含有偏微係數者,則謂之偏微分方程式(partial differential equation):

例 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \cdots\cdots (1c)$$

設微分方程式中,只含有第一微分或微係數者,則謂之

初級微分方程式(first order differential equation),微分方程式之等級,卽其內所含有最高級之微係數之等級.如(1a)所示,卽爲初級方程式.如(1b),(1c)所示,卽爲二級方程式.

在本書內只研究關於全微分方程式.在每問題中,各數量爲單自變數的函數,如此卽不致有偏微係數發生.例如運動問題,諸變數皆爲時間的函數,解題時求該變數爲時間之函數.

**2. 微分方程式之解. (Solutions of a Differential Equation.)**

設有一方程式,變數適合於其自身之時,則此變數及其微分或微係數亦適合於所設微分方程式.如此類之方程式,稱爲微分方程式之解.

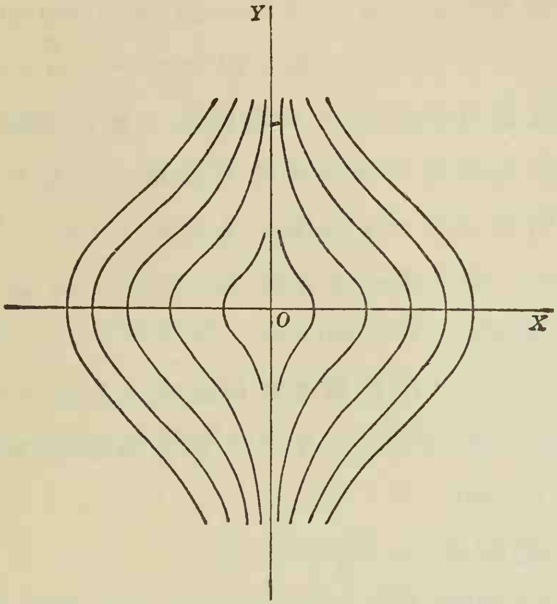
例 $$\frac{1}{3}x^3+xy^2=c \cdots\cdots\cdots\cdots (2a)$$

設 $c$ 爲常數時,則 (2a) 爲下方程式之解:

$$(x^2+y^2)dx+2xydy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2b)$$

因求 (2a) 之微分時,卽得 (2b) 於是 $x$ $y$ 二變數,適合於 (2a) 而變化時,則其自身及其微分卽適合於 (2b).常數 $c$ 之值既是隨意的,故此微分方程式之解有無限多的.

現以 $x$, $y$ 之二値爲點,屬於平面上直交軸之坐標,繪圖,每一解以一曲線代表之.如(圖 2)內之諸曲線是代表 (2b) 之解,對於平面之任何點可有一曲線通過之.但有時在較複雜之情形之下,可以有若干曲線通過一點.




(圖 2)

解二變數初級微分方程式時,恆化作下式:

$$du=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2c)$$

此式內之 $u$ 爲二變數已知之函數.如前例

設 $$u=\frac{1}{3}x^3+xy^2,$$

則 $$du=(x^2+y^2)dx+2ydy.$$

因 $u$ 之值,所以 $(2b)$ 式與 $du=0$ 相同.

設 $c$ 爲任何常數,可以微分法證明

$$u=c\text{ 式} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2d)$$

爲 $du=0$ 式之解.

欲明瞭 (2$d$) 式可為 (2$c$) 式之一切解,則可設一解如下:

$$f(x, y)=0 \cdots\cdots\cdots (2e)$$

此解可以曲線表之,在此曲線上 $u$ 為單變數之函數,例如沿曲線之距離,微積學上證明單變數之函數之微分等於零時,則其函數必為一常數.因之在曲線上 $u$ 為一常數,即 $x, y$ 適合於 (2$e$) 一切之値,亦適合於 (2$d$) 類之式.因此則 $u=c$ 為 $du=0$ 式之通解 (general solution).

解一個微分方程式,用微分法之反式卽積分法.因此一解,稱為微分方程式之積分.代表各解之曲線,常稱為積分曲線 (integral curves).

**3. 離變數法.**

設微分方程式如下:

$$f_1(x)dx+f_2(y)dy=0 \cdots\cdots\cdots (3a)$$

在一項內只含有 $x$ 及 $dx$, 在他項內只含有 $y$ 及 $dy$. 在此種情形下,變數稱為分離的 (separated).

各項為適合微分 (exact differential).以 $du=0$ 之式,可以代表 (3$a$) 全式.此式中之

$$u=\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy,$$

故 (3$a$) 之解卽 $u=c.$

或 $\int f_1(x)dx+\int f_2(y)dy=c.$

此式中之 $c$ 為隨意之常數.

各積分公式只含有一個變數.設變數不被分離,則不能

以如此簡單之方法解微分方程式也.

例　$$xdy+(1-y)dx=0 \qquad \cdots\cdots(3b)$$

既不能求 $xdy$ 之積分,故不能以直接的積分法求其解.但可用除法化(3b)式爲以下之簡式:

$$\frac{dy}{1-y}+\frac{dx}{x}=0.$$

在此式內變數爲被分離的,其解爲:

$$-\log(1-y)+\log x=c \qquad \cdots\cdots(3c)$$

變數如此可分離時,則微分方程式稱爲可分離的(separable).

例　$$Mdx+Ndy=0.$$

設各係數 $MN$ 只爲單變數之函數或含有單變數因數之積,則前式爲可分離之方程式 (separable equation).

例　(3b) 式及

$$(xy^2-x)dx+(y+x^2y)dy=0 \qquad \cdots\cdots(3c)$$

$$M=(xy^2-x)=x(y^2-1),$$

$$N=(y+x^2y)=y(1+x^2).$$

## 4. 微分方程式之解的形式. (Different Forms of Solution).

(3c) 式爲

$$\log x-\log(1-y)=c \qquad \cdots\cdots(4a)$$

可書爲

$$\log\frac{x}{1-y}=c,$$

由此

$$\frac{x}{1-y}=e^{c}=k.$$

在此式中 $c$ 旣爲隨意的常數,則 $k$ 亦爲隨意的常數.用 $c$ 代 $k$, 則微分方程式之解可書如下式:

$$x=c(1-y)\cdots\cdots(4b)$$

而 $c$ 之任何函數爲常數,則 (4b) 解可書爲:

$$x=c(y-1)\cdots\cdots(4c)$$

$$y-1=cx\cdots\cdots(4d)$$

或

$$1-y=cx\cdots\cdots(4e)$$

以上之 (4a),(4b),(4c),(4d)及 (4e) 諸解爲等值的 (equivalent). 吾人卽可隨意用其一作爲 (3b) 式之解. 但是 $c$ 常數在以上五式中的義意不同,因之不能同時用其二式.若吾人以相當之手續,卽可直接求得其中之任何解.如將 (3b) 書爲下式:

$$xdy-ydx+dx=0,$$

以 $x^2$ 除之可得下式:

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}+\frac{dx}{x^2}=0.$$

首項爲 $\frac{y}{x}$ 之微分,乃以直接積分法可得下式:

$$\frac{y}{x}-\frac{1}{x}=c,$$

卽

$$y-1=cx\cdots\cdots(4d)$$

吾人欲簡化微分方程式之解,恆用對數之諸性質.在本書上,則用 $\log u$ 代表 $u$ 之自然對數(即是底數 $e$ 之對數也).因此對數之定義如下:

$$e^{\log u}=u \quad \cdots\cdots (a)$$

其重要之性質可用以下的方程式表示之:

$$\log e^{u}=u \quad \cdots\cdots (b)$$

$$\log(uv)=\log u+\log v \quad \cdots\cdots (c)$$

$$\log\frac{u}{v}=\log u-\log v \quad \cdots\cdots (d)$$

$$\frac{1}{n}\log u=\log u^{\frac{1}{n}} \quad \cdots\cdots (e)$$

$$\log 1=0 \quad \cdots\cdots (f)$$

$$\log\frac{1}{v}=-\log v \quad \cdots\cdots (g)$$

任何常數既爲其他常數之對數,爲方便故恆以 $\log c$ 代 $c$ 爲積分常數.

例　欲解　$(1+x^2)dy-xydx=0.$

分離變數則爲

$$\frac{dy}{y}-\frac{xdx}{1+x^2}=0.$$

求積分並以 $\log c$ 爲積分常數:

$$\log y-\frac{1}{2}\log(1+x^2)=\log c,$$

亦即爲

$$\log y=\log\sqrt{1+x^2}+\log c.$$

由此則

$$y = c\sqrt{1+x^2}.$$

此解亦可書爲下式:

$$y^2 = c^2(1+x^2),$$

$$y^2 = c(1+x^2),$$

或 $$cy = 1+x^2.$$

## 習 題

解以下之諸方程式:

1. $\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0.$

2. $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy = 0.$

3. $ydx + (x+xy)dy = 0.$

4. $dx - \sqrt{a^2-x^2}\, dy = 0.$

5. $\tan x \dfrac{dy}{dx} - y = a.$

6. $r\dfrac{dr}{dx} = \sqrt{a^4-r^4}.$

7. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2.$

8. $e^{x-y}dx + e^{y-x}dy = 0.$

9. $e^y\left(\dfrac{dy}{dx}+1\right) = 1.$

10. $(1+x^2)dy + (1+y^2)dx = 0.$

### 5. 初級方程式之圖示.

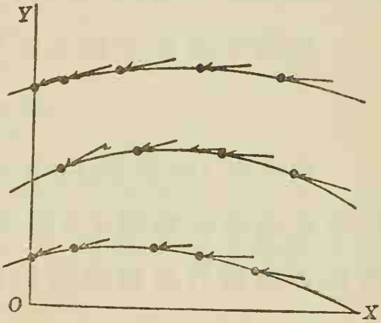
含有二變數 $x, y$ 之初級方程式的通式如下:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \quad \cdots\cdots (5a)$$

解$\frac{dy}{dx}$之值如下:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad \cdots\cdots (5b)$$

在所設方程式內,$f(x, y)$為已知函數,在平面上諸$(x, y)$點,(5b)方程式決定$\frac{dy}{dx}$斜度之值.在諸點畫作短直線,其直線之斜度適與$\frac{dy}{dx}$之值相同.此等短線謂之微線(line elements).於是微分方程式對於在平面上每一點決定一微線,及全平面上一切微線之總,即微分方程式之圖示.



(圖 5a)

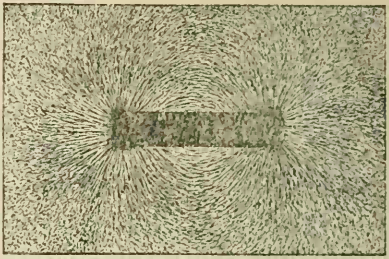
設　$$\phi(x, y)=0 \quad \cdots\cdots (5c)$$

為(5b)之解.

求(5c)方程式之微分,得$\frac{dy}{dx}$之值適合於(5b).如此積分曲線,在其諸點之斜度與屬於該點之微線斜度相等.故積分曲線,切於其諸點之微線.

仿此有時得微分方程式之近似解(approximate solution),畫作微線及切於諸微線之曲線.例圖寫一塊磁石周圍之諸磁力線時,以鐵屑散布於紙上,以手輕彈紙面,不久則鐵

屑沿磁力線之方向而排列,作成決定此磁力線之微分方程式之圖示.該磁力線可沿鐵屑之途徑畫成之.同樣欲畫液體流動之圖,恆用箭號(→)表示其流動之方向,畫在各處切於箭號之曲線,謂之流線(stream lines).



(圖 5b)

普通求初級方程式之解如下:

$$u(x, y) = c.$$

此式中$c$爲常數,函數$u$沿各積分曲線爲常數,故$(x, y)$點沿積分曲線運動而$u$不變.解微分方程式可求函數$u$當$(x, y)$點沿各處切於微線之途徑時,則函數$u$之值不變.

6. 幾何問題. (Geometrical Problems.)

屬於曲線有些可用微係數代表之量.例如斜度曲率半徑,此量所適合之方程式則爲含有微係數之方程式.

例如曲線之斜度爲所設$x, y$之函數,卽$f(x, y)$,於是此曲線適合於

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

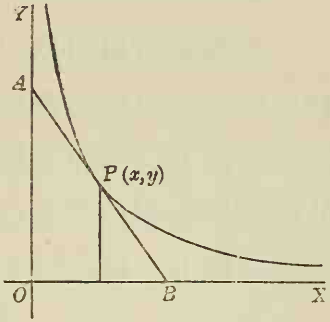
可解上式則得曲線之方程式,在平素曲線之斜度,非如上式直接所設,但常以含有微係數方程式表示曲線已知之性質.

例 1. 在曲線上之任何點,其切線在兩軸間之部份,爲切點所平分,求其方程式.

設 $P(x, y)$ 點爲 $AB$ 切線之中點,(圖 6a) 由相似三角形

$$AO = 2y,$$

$$BO = 2x,$$




(圖 6a)

切線之斜度等於曲線在 $P$ 點斜度.即 $\frac{dy}{dx}$.

因此 $\frac{dy}{dx} = -\frac{AO}{BO} = -\frac{y}{x}$.

在圖中之斜度爲負, $x, y$ 爲正,因之在上式內用負號.若是畫曲線在他象限內, $x$, $y$ 之坐標有時爲負,無論如何,總可證明上式之眞確.上式內分離變數則得:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

由此 $$\log x + \log y = \log c,$$

或 $$xy = c.$$

此卽爲所求之曲線方程式.

例 2. 求直交 $x^2 - y^2 = a^2$ ……………………………………………………(6a)

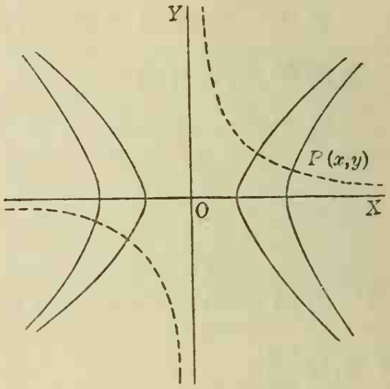
諸雙曲線 ($a$ 有任何之值) 之諸曲線,此等曲線謂之雙曲線系的直交曲線 (orthogonal trajectories).

求 (6a) 對於 $x$ 之微分則得

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0.$$

由此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y} \qquad \text{(6b)}$$



(圖 6b)

此爲雙曲線在 $(x, y)$ 點之斜度.直交雙曲線之曲線在交點之斜度 (圖 6b),等於雙曲線斜度之反號倒數.現設 $(x, y)$ 爲直交曲線上一變點的坐標,則必適合於下方程式:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \qquad \text{(6c)}$$

此式之解爲 $xy=c.$ (參考例 1.)

此爲雙曲線系的直交曲線方程式.

在 (6b) 及 (6c) 內, $x, y$ 之各値相同,而其微係數之値不同,似覺奇疑.在一交點 $x, y$ 在原曲線上之値與在直交曲線上之値相同.但在兩曲線上之其他點, $x$, $y$ 之値不同,因之在 $(x, y)$ 點之微係數亦不同.

**7. 常數之決定法. (Determination of Constants.)**

積分常數旣可有任何之値,則所設之微分方程式,有無限多之解,在眞實問題內,通常有特別的提示,用此可決定常數而得一定之解.

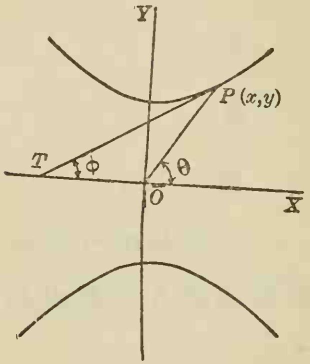
例如已知曲線通過某點,以某點坐標代入方程式內,卽可決定常數之値.有時在微分方程式內,含有未知之常數如

$$\frac{dy}{dx} = kf(x, y).$$

此式內之 $f(x, y)$ 爲已知之函數.設曲線通過 $(x_1, y_1)$ 及 $(x_2, y_2)$ 兩已知點,即可以此數值代入解,而得 $c$ 及 $k$ 兩數之值.

在問題內,常分爲兩部.第一部爲含有處處(或時時)適用之條件,恆以此求得微分方程式.第二部爲含有只在一處(或一時)適用之條件,恆以此決定常數之值.

例　通過(1, 2)點之曲線,在任何 $P$ 點之切線與連接 $P$ 點與原點之直線,與 $x$ 軸成餘角,求曲線之方程式.



(圖 7)

設 $x, y$ 爲 $P$ 點之坐標. $OT$ 直線斜度爲

$$\tan\theta = \frac{y}{x},$$

$TP$ 切線之斜度爲

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx}.$$

設若 $\theta$ 及 $\phi$ 爲餘角時.此角之正切等於彼角之餘切.

是以 $\frac{dy}{dx} = \tan\phi = \cot\theta = \frac{x}{y},$

$$ydy - xdx = 0,$$

$$y^2 - x^2 = c.$$

曲線既然通過(1, 2)點,此點之坐標,必適合於此方程式.所以 $c = 3$,而曲線之方程式爲

$$y^2-x^2=3.$$

**8. 含有積分的方程式.** (Equations Containing Integrals.)

有時在方程式內之變數,只可以變限積分(integral with variable limits)表示之.此類方程式,不爲微分方程式.但可用微分法化成微分方程式也.求微分之結果,卽取消其積分號.

例如設 $$A=\int_a^x f(x)dx,$$

此式中 $a$ 爲常數

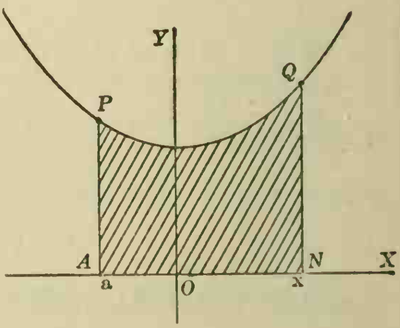
則 $$\frac{dA}{dx}=f(x),$$

設 $$A=\int_x^a f(x)dx,$$

則 $$\frac{dA}{dx}=-f(x).$$

以微分法可取消積分號,如同以乘方法可取消根號,有時發生題外之解,因此每求得一解後,須代入原式內以覆驗之.

例 有 $x$ 軸,曲線弧,一定縱坐標與一變縱坐標,其包含之面積與該兩縱坐標間之曲線弧長度爲正比例,求曲線方程式.



(圖 8)

在(圖 8)內設 $PQ$ 爲曲線弧,$AP$ 爲定縱坐標,$NQ$ 爲變縱坐

標,曲線弧與$x$軸間之面積爲

$$\int_a^x y\,dx,$$

並曲線弧之長爲

$$\int_a^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

面積與弧長正比,所以得

$$\int_a^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = k\int_a^x y\,dx \qquad (8a)$$

求此式對於$x$之微分,則得下式,

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = ky \qquad (8b)$$

求$\frac{dy}{dx}$則得

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{k^2y^2-1} \qquad (8c)$$

分離變數後求積分則

$$\log\left(ky+\sqrt{k^2y^2-1}\right) = kx+\log c,$$

或

$$ky+\sqrt{k^2y^2-1} = ce^{kx}.$$

求$y$則得曲線方程式如下:

$$y=\frac{1}{2k}\left[ce^{kx}+\frac{1}{c}e^{-kx}\right] \qquad (8d)$$

要覆驗此解,則求(8$d$)式之微分,卽得(8$c$)式. 由(8$c$)可得(8$b$). 求(8$b$)式之積分,卽得(8$a$)式.

# 幾何問題

1. 曲線之任何切線於切點與$x$軸間之部份為$y$軸所平分,求曲線之方程式.

2. 曲線之諸法線通過一定點,求其方程式.

3. 曲線之諸次法線之長為常數$a$,求其方程式.

4. 曲線在任何點之切線,該點與原點之連線及$x$軸三直線成等腰三角形($x$軸為底邊),求曲線為何.

5. 有曲線過$(1,1)$點而直交$y^2=4Px$諸拋物線($P$有任何之值),求其方程式.

6. 求$x^2y=c$曲線系之直交曲線為何.

7. 有曲線過$(r=a,\ \theta=0)$點,而與諸過原點之直線成$\alpha$角,以極坐標求曲線之方程式.

8. 有一物體,以$v_0$初橫速在曲線上下流,其與發點之縱距離為$h$時,其速為

$$v=\sqrt{2gh+v_0^2}\,.$$

設若其橫速不變,求曲線為何.

9. 曲線弧之長與其在原點所成之角為正比,求曲線之方程式.

10. 一曲線,其一定縱坐標,一變縱坐標及$x$軸四線所成之面積,與該兩縱坐標之差為正比,求曲線之方程式.

11. 曲線任何點之兩坐標及$x,y$兩軸成矩形,此矩形為

曲線所分成兩部份,設一部份面積爲他部份面積之二倍,求曲線之方程式.

12. 設 11 題內之曲線,旋繞 $y$ 軸時,則兩面積轉過相等體積,求曲線方程式.

13. 旋轉曲面有一帶爲垂直於其軸之兩平面所截成,設該帶之曲面積與兩平面間之距離爲正比,求原曲面方程式.

14. 爲直接記錄波長起見,波長計內之旋板蓄電器之板的形式必如下:動徑 $r$ 與 $\theta=0$ 直線間之扇面積與 $\theta$ 之平方爲正比,求板邊爲何曲線.

15. 在某種波長計內,蓄電器板之形式,適合於下條件:不拘板之位置如何,動徑 $r$ 旋過所設小角時,增加有效面積之百分數恆相同,求板形爲何

16. 設有光點源且在曲面上之任何點,其法線與連接該點與點源之動徑 $r$ 成 $\phi$ 角,則曲面上在該點之明亮強度爲

$$\frac{k}{r^2}\cos\phi.$$

今設在旋轉曲面軸上之一定點有光源,並曲面上之諸點皆等明亮,求曲面爲何.

17. 液體旋繞垂直軸時,其表面爲旋轉拋物面,試證之.

注意. 液體面上之液點的重力與作用在其上之離心

力,兩力之合力方向必垂直於液體表面.

## 9. 變化率.

$x$數量隨$t$時間而變化時,其變化率以微係數$\frac{dx}{dt}$代表之.

設由題內之條件,變化率可示如下式:

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t) \qquad (9a)$$

則解此微分方程式而得 $x$ 數量爲 $t$ 之函數.

欲作微分方程式時,爲方便故往往用微分.設 $x$ 量按其在 $t$ 時之變化率,在$t$與$(t+dt)$時內繼續變化,則可以 $dx$ 爲 $x$ 量在此 $dt$ 時間內所生之總變化.如此則得與(9a)式等値的微分方程式如下:

$$dx=f(x,t)dt \qquad (9b)$$

例　鐳(radium)之分解率與其所有之分量爲正比例,今設其原有之分量過1600年後,一半變沒,求過100年所失去之分量爲何.

設當 $t$ 時鐳所有之量爲$R$.

則分解率爲 $-\frac{dR}{dt}$.

此率旣與$R$爲正比例.

所以
$$\frac{dR}{dt}=-kR.$$

此式中之 $k$ 爲常數.

由此 $$\frac{dR}{R}=-kdt,$$

而 $$\log R=-kt+c \cdots\cdots\cdots\cdots (9c)$$

設 $R_0$ 爲原有之量,當 $t=0$ 時, $R=R_0$.

∴　由 (9c) $\log R_0=c$.

以此值代入(9c)內而遷項.

則得 $$\log\frac{R}{R_0}=-kt.$$

當 $$t=1600,\quad R=\frac{1}{2}R_0,$$

故 $$\log\frac{1}{2}=-1600\,k,$$

$$k=\frac{\log 2}{1600}.$$

當 $t=100$ 則有 $$\log\frac{R}{R_0}=-k\,100$$

$$=-\frac{\log 2}{1600}\cdot 100$$

$$=-\cdot 0433.$$

而 $$\frac{R}{R_0}=0.958.$$

卽知過100年,原鐳之餘存爲95.8%.所失去的爲4.2%.

## 10. 定限積分法. (Integration Between Limits).

求微分方程式之解,有時不用積分常數,而爲省事故,可以定限積分法.設 $x=x_0$ 則 $t=t_0$, 且 $x=x_1$, 則 $t=t_1$. 則由下式

$$f_1(x)dx+f_2(t)dt=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (10a)$$

直接可得

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx + \int_{t_0}^{t_1} f_2(t)\,dt = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10b)$$

因定限積分爲微分和之極限値,並且(10a)式中之全微分恆等於零,所以其和亦爲零.故此式中不發生積分常數.

注意　(10b)式中兩積分之下限爲 $x, t$ 之相當之値.上限亦是.

例　年息爲5分,按複利時時計算,問幾年後100元之本利合計爲200元?

設七年後本利合計爲 $A$.所有之增加全由於利之累積.若 $dt$ 年間增加率不變,則所生之利爲

$$dA = .05 \cdot A \cdot dt.$$

由此
$$\frac{dA}{A} = .05dt,$$

取 $A=100,\ t=0$ 爲下限, $A=200,\ t=t$ 爲上限,而求定限積分.

則得
$$\int_{100}^{200} \frac{dA}{A} = \Big[.05 \cdot t\Big]_0^t.$$

由此
$$t = \frac{1}{.05}\log\frac{200}{100} = \frac{1}{.05}\log 2 = 13.9\text{ 年}.$$

**11. 流射孔之水流. (Flow of Water from an Orifice.)**

今設水面下 $h$ 距離有一流射孔,若無消耗能之故,水出孔之速等於落體下落 $h$ 距離所生之速,即 $\sqrt{2gh}$.因摩擦及水流之集合形各線故,水之眞平均出孔速爲

$$v=c\sqrt{2gh}.$$

若普通有尖邊之小流射孔,則此式中之 $c$ 近似等於0.6. 以此值及 $g=32$ 秒秒呎代之

則得　　$v=4.8\sqrt{h}$ 秒呎.

例　一水池之橫剖面爲4呎平方,其高爲6呎,池中水自底邊內之一吋直徑孔流出,問水到幾時方能流完?

在 $dt$ 時內,所出之水,生成高度 $vdt$,一吋直徑平圓底邊之圓柱體,其體積爲

$$\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 vdt \text{ 立方呎.}$$

在 $dt$ 時內,水池內自水面下失去4呎平方,一 $dh$ 厚之水其體積爲

$$-16\,dh \text{ 立方呎.}$$

以上兩體積必相等.

所以
$$-16\,dh=\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 vdt$$
$$=\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2 4.8\sqrt{h}\,dt.$$

分離變數則得

$$dt=-611\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

而
$$t=-611\int_6^0\frac{dh}{\sqrt{h}}=2993\text{ 秒}=49.9\text{ 分.}$$

**12. 連續性方程式. (Equation of Continuity).**

在物理作用中,有時有一種不被創造亦不被消滅的物

質,設有入界限或出界限者,則此物質在所設之境域內所有之分量方能變.在此種情形之下,可以下式表之.

增量＝入量－出量

有時稱曰連續方程式,以微分書之,可得一微分方程式.以此式可決定該物質之變化.

設若分佈爲一定的,則某物質之濃度(concentration) $c$ 爲其在單位容積內所有之分量,濃度一致時,物質在 $v$ 容積內所有之分量爲 $cv$.

例 設池內之 500 公升 (liters) 鹹水中,有20 瓩溶解的鹽,每分鐘15公升水流入池內,同時鹹水與水混合而以相等之速率流出池外,擾動鹹水,使其濃度一致,過一小時池內餘剩多少鹽?

設過 $t$ 分鐘池內餘剩 $x$ 瓩鹽.

則當時濃度爲 $c=\dfrac{x}{500}$ 公升瓩.

在 $dt$ 時內 $\begin{cases}\text{入池之水爲 } 15\,dt \text{ 公升,}\\ \text{並出池外含 } 15\,c\,dt \text{ 瓩鹽之 } 15dt \text{ 公升鹹水.}\end{cases}$

由此池內鹽之分量的變化爲

$$dx=-15\,c\,dt$$

$$=\frac{-15\,x\,dt}{500}$$

$$=\frac{-3x}{100}dt.$$

於是 $$\int_{20}^{x}\frac{dx}{x}=-\frac{3}{100}\int_{0}^{t}dt.$$

設 $t=60$, 則 $x$ 瓩爲過一點鐘所剩之鹽量.

則 $$\left[\log x\right]_{20}^{x}=-\frac{3}{100}\left[\,t\,\right]_{0}^{60},$$

由是 $$\log\frac{x}{20}=-1.8,$$

而 $$x=3.31\text{ 瓩}.$$

**13. 熱之流動. (Flow of Heat.)**

設使物體界面上各處之溫度不變,其究竟將近於熱穩定狀態.在此狀態中,物體之任何兩點之溫度或者不相等,但在所設之一點的溫度恆不變.

在多種情形之下, $T$ 溫度爲 $x$ 單坐標之函數,由牛頓定律則單位時間內,流過垂直於 $x$ 方向之 $A$ 面積之熱量爲

$$Q=-kA\frac{dT}{dx}\quad\cdots\cdots\cdots(13a)$$

此式中之 $k$ 爲常數,名爲該物質之傳導率(conductivity).用糎,克,秒單位制時,則 $Q$ 之單位爲秒卡 (calories per second).

設有一列曲面 $A_1, A_2,\cdots\cdots$ 並流過 $A_1$ 之熱,亦流過 $A_2, A_3\cdots\cdots$ 等面.則連續方程式爲

$$Q=\text{常數}\quad\cdots\cdots\cdots(13b)$$

若 $A$ 爲 $x$ 之函數並 $Q$ 爲常數時,則解 (13$a$) 可得 $T$ 爲 $x$ 之函數,以 $x$ 及 $T$ 在界面之各值代入解,則可以求得積分常數及 $Q$ 之值.

例　有 6 糎內半徑 10 糎外半徑之鐵球殼,鐵之傳導率

爲0.14,設內面熱度爲 200°C,外面熱度爲20°C.求與中心距離 $r$ 之點的熱度及每秒過殼外射之熱量.

因球殼之對稱形,即知熱沿半徑而流動,熱所流過與中心距離 $r$ 之面積爲半徑 $r$ 之球面.而其面積爲

$$A=4\pi r^2.$$

當穩定狀態時,內外兩表面間無一蓄積熱之處,故每秒過鐵中諸球面所流之熱量相等.所以(13a)式爲

$$-4\pi kr^2\frac{dT}{dr}=Q=\text{常數}.$$

分離變數後求積分

則得 $$4\pi kT=\frac{Q}{r}+C.$$

由題內條件當

$$r=10,\quad T=20.$$

$$r=6,\quad T=200.$$

則得 $$C=-1000\pi k,$$

$$Q=10,800\,\pi k$$

所以 $$T=\frac{2700}{r}-250.$$

並過殼之熱

$$Q=10,800\,\pi k$$

$$=4750\text{ 秒卡}.$$

## 14. 二次作用. (Second Order Processes)

在含有兩自變數之問題內,有時聲明某 $z$ 量與 $x$ 爲正

比亦與 $y$ 爲正比.即 $y$ 不變時, $z$ 與 $x$ 爲正比. $x$ 不變時, $z$ 與 $y$ 爲正比.此兩語可以下式表示之:

$$z=kxy.$$

式中之 $k$ 爲常數.

例如 $x$ 物質之溶解率與其所有之分量爲正比,設 $S$ 爲該物質在飽和溶液中之濃度,而 $C$ 爲其在所有之溶液中之濃度,則知該物質之溶解率亦與 $(S-C)$ 爲正比.

可以下式表示之

$$\frac{dx}{dt}=kx(S-C)\cdots\cdots\cdots\cdots(14a)$$

因所有物質(固體及溶解者)之分量不變,則可得一連續性方程式.以此式則可以 $x$ 之一次函數代表 $C$,後得 $\frac{dx}{dt}$ 爲 $x$ 之二次函數.

在此作用中, $x$ 之變化率爲 $x$ 之二次函數,故有時稱曰二次作用(second order process).

例　吾人欲自不可化(inert)之物質中,以苯(benzol)取出硫磺.設某物質含有 6 克硫磺,而用 100 克苯.硫磺飽和 100 克苯時,其內有 11 克硫磺.今設 50 分鐘 3 克硫磺被溶解,過 6 點鐘所溶解之分量爲何?

設過 $t$ 時,硫磺未溶解之分量爲 $x$ 克.

其已溶解的爲 $(6-x)$ 克.

於是
$$C=\frac{6-x}{100}.$$

而欲飽和100克苯需11克硫磺,

故 $$S=\frac{11}{100}=0.11.$$

因此溶解率爲 $$\frac{dx}{dt}=kx(S-C),$$

$$=kx\left(0.11-\frac{6-x}{100}\right)$$

$$=\frac{k}{100}x(5+x).$$

由題當 $t=50,\ x=3;\ t=0,\ x=6.$

所以 $$\int_6^3\frac{dx}{x(5+x)}=\frac{k}{100}\int_0^{50}dt.$$

得 $$k=\frac{2}{5}\log\frac{11}{16},$$

$$k=-0.15.$$

若過6點鐘則

$$\int_6^x\frac{dx}{x(5+x)}=-\frac{0.15}{100}\int_0^{360}dt.$$

得未溶量

$$x=0.19\text{ 克}.$$

**15. 微分之相關. (Differential Relations.)**

立微分方程式之程序,往往可以簡易方法減短之.此法似帶近似性而反生眞確結果.

例如對於一級微分而論,可以曲線之微小部分爲直線,以曲面近一點之部分爲平面.在$dt$微小時間中,可以分子之

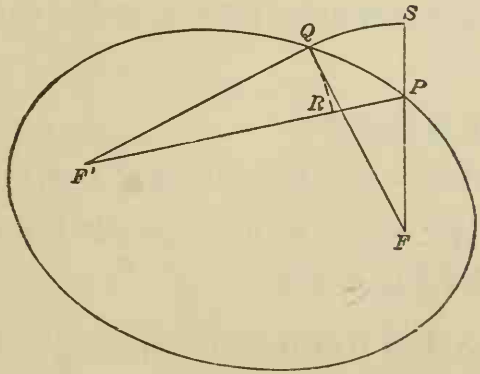
運動爲等速者,以某物理作用之動作率爲常數.由其定義兩微分之比例爲兩增量之比例的極限値,並該兩增量越近於零.以上之各假定越適合於事實,故生眞確之結果.

如此之立微分方程式法有時稱曰微分之方法(differential methods).如以上所提者,只對於一級微分及微係數爲適用.設若以曲線之微小部份爲直線,或以物理作用在微小時間中爲有恆率者,而得含有第二微係數之方程式,則該式大概非眞確.

例　自一定點所發之諸光線,經過某反光鏡反射後,皆通過第二定點,求此反光鏡形如何.

設自 $F$ 點所發之光,反射後過 $F'$ 點(圖 15a).鏡形必爲旋轉曲面形,不然自 $F$ 點在過 $FF'$ 二點平面內所發之光線反射後,則非在原平面內,而不能過 $F'$ 點.

以 $F, F'$ 爲中心作兩圓弧 $QS, QR$.




(圖 15a)

$PQS$, $PQR$ 兩三角形包含 $PSQ$, $PRQ$ 兩直角.

設其各邊爲直線,則爲平面內之兩直角三角形,並其 $PQ$ 斜邊爲公用.

又因入射角等於反射角

則 $$\angle QPS=\angle QPR,$$

故兩三角形相等

而 $$PS=PR \cdots\cdots (15a)$$

今設 $$FP=r,\ F'P=r',$$

則 $$FQ=r+dr,\ F'Q=r'+dr'.$$

所以 $$dr=PS,$$

$$dr'=-PR.$$

由 (15$a$) 式

$$dr=-dr',$$

而 $$r+r'=\text{常數} \cdots\cdots (15b)$$

過 $FF'$ 之平面所生成的鏡面的剖面爲橢圓,此橢圓之兩焦點爲 $FF'$.

故鏡面爲旋轉橢圓面.

設若此題中以小三角形之各邊爲直線,似乎生可疑之處.則可設想圖之各部一致的放大,致 $FF'$ 距離爲百萬里而 $PQ$ 距離只爲一寸,如此則以任何儀器,不能查出 $QS$, $QR$ 兩弧與兩直線之不同.而且所有之兩三角形與 $PQ$ 至相當小時,圖內兩三角形相似.

例 2.　設若空氣自第一位置運動至他高度不同的位置之時,作絕熱膨脹 (expands adiabatically),即膨脹時無或自外收入或向外射去之熱.

設 $p$ 爲壓力, $\rho$ 爲密度, $k$ 爲常數.

則
$$p=k\rho^n \qquad (n=1.4).$$

今設空氣在海面上之密度爲.08立方呎磅,及其壓力爲2100方呎磅,求大氣之高度爲何?

在任何位置之壓力,由於其上邊空氣之重量,設想底在海面上一方呎橫剖面的空氣柱在 $h$ 高度之壓力,爲柱在此以上之部份的重量,高度增加 $dh$ 時,所生之壓力變化爲 $dh$ 體積空氣之重量.

故
$$dp=-\rho dh,$$

$h$ 增大時 $p$ 減少,故此式中用負號.

但
$$p=k\rho^n,$$

所以
$$dp=nk\rho^{n-1}d\rho,$$

而
$$-\rho dh=nk\rho^{n-1}d\rho,$$

分離變數後求積分

則得
$$\int_0^H dh=-\int_{\rho_0}^0 nk\rho^{n-2}d\rho.$$

此式中 $H$ 爲大氣高度, $\rho_0$ 爲海面上之密度,即 0.08. 故

$$H=\frac{nk\rho_0{}^{n-1}}{n-1}$$

$$=\frac{nk\rho_0^n}{(n-1)\rho_0}.$$

但在海面上

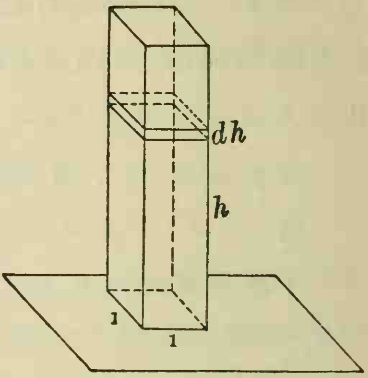
$$p_0 = k\rho_0^n$$

所以 $H = \dfrac{np_0}{(n-1)\rho_0}$

$= \dfrac{(1.4)(2100)}{(.4)(0.08)}$

$= 91,900$ 呎.

$H = 17.4$ 哩(約).




(圖 15b)

## 問題

1. 培養的酵母中,活動酵素之增量率與當時所有之分量爲正比,設此分量過一小時加倍,過 $2\frac{1}{2}$ 小時其分量如何?

2. 因逸散之故 (leakage), 一帶電之表面的放電率與其電荷爲正比,求電荷爲時間之何函數?

3. 設一滴液體之蒸發率與其表面面積爲正比, 而求滴之半徑爲時間之何函數.

4. 按牛頓冷却定律, 一物質在空氣中之冷却率與物質和空氣兩溫度之相差爲正比.今設空氣溫度爲 20°C, 而物質溫度在 20 分鐘內自 100°C 降低至 60°C, 其溫度至 30°C 爲何時?

5. 在一化學作用中, 一物質漸次變化成他物質, 而其化率與未化質之分量爲正比. 設若過一點鐘,過三點鐘此分

量爲31.4, 9·7, 求原始分量爲何?

6. 一直立水池底有漏口, 設水之漏洩率與壓力爲正比,而第一日內有十分之一已漏出,求池水至何時可漏出一半.

7. 年息6分,按複利時時計算,若每年算利,年息必如何方與前者爲等値?

8. 設某人每日所賺款比其用費多5元,以此5元時時投資,複年息6分, 過25年其儲金及利合計如何?不關閏年以每日的5元按1825元之年率時時的投資, 以此法所得之結果比在每日初投5元時所得者少,又比在每日終投5元時所得者多,並且與彼等之相差,不越5元本金在25年中所生之利?

9. 年息6分時時算複利, 要在25年中生每日5元之入款,而至25年畢,本金用盡, 須用之本金爲何?

10. $F$力作用於彈弦上時, $x$長之弦之伸長爲$kxF$, 此$k$爲常數. 今設$l$長之彈弦自一端懸着而爲其自身重量$w$所伸長,求其伸長如何?

11. 高6呎直徑4呎之圓筒之軸爲垂直的, 滿筒之水自底內之直徑2吋孔流盡,須用何時?

12. 設11題內水池軸爲水平,而求水流盡之時間如何?

13. 兩垂直水池之底爲2吋直徑短管所連接,池之高度4呎, 直徑4呎, 設一池滿,他池空, 求兩池中之水面等高在何時?設水過管之速等於其在相同有效壓力之下過口孔之速.

14. 有4呎高底邊6呎方之水池,每分鐘10立方呎水流入池,設若同時水自池底內之一吋直徑口孔漏出,至何時池可滿?

15. 每5公升含有一瓩鹽之鹹水,流入滿有500公升淡水之池,每分鐘流入10公升,所生混合液以等速流出池外,求過一點鐘池中之鹽若何?

16. 池中有含被溶解之鹽25瓩之鹹水500公升,每分鐘15公升水流入池內,而10公升混合液出池外,混合液之濃度因攪動而恆一致,過一點鐘池中之鹽幾何?

17. 設16題內,池底有一層混合的鹽與某不可溶解之物,設若鹽之溶解率與當時所有之溶液與飽和溶液兩濃度之差爲正比,並且水淡時每分鐘0.5瓩鹽要被溶解,求知過一點鐘溶液中之鹽爲何?設每公升飽和溶液中含有0.3瓩鹽.

18. 氧流入滿空氣之一公升瓶,同時所生之混合氣體出瓶外,設化學作用緩慢,使瓶中混合氣爲一致的,則5公升通過瓶後,混合氣中有百分之幾爲氧?設空氣百分之21爲氧.

19. 某國有一兆兆元紙幣,銀行每日之清算爲5百萬元,政府規定要用新幣,凡投銀行之舊幣,皆以新幣代換,問新幣至何時則占通行幣百分之90?

20. 下課後一$30' \times 30' \times 12'$教室內空氣百分之.12爲$CO_2$(二氧化碳),欲使過10分鐘,其百分之.06爲$CO_2$,須每分鐘准入含百分之.04 $CO_2$之空氣多少立方呎?

21. 設平常人呼吸每分鐘18次,每次呼出含百分之4 $CO_2$之100立方吋氣,容積爲10,000立方呎之教室內之空氣爲淸.有50人入室,因通氣器每分鐘有1000立方呎淸氣入室,求過半點室內空氣百分之幾爲$CO_2$?設淸空氣含百分之.04 $CO_2$.

22. 由通氣器每分鐘含有百分之.04 $CO_2$的10,000立方呎淸空氣進入200′×45′×12′之工廠,而過半點鐘,所有之$CO_2$占空氣百分之.12,至正午$CO_2$要占百分之幾?

23. 有厚30糎之磚牆 ($k=0.0015$),設內外兩表面之溫度爲20°C,0°C,求知牆中之溫度爲與外表面距離之函數;又求每日過一方米面積所失散之熱量爲何?

24. 20糎直徑之管爲厚10糎之鎂(magnesia)($k=0.00017$)皮所包,設皮外面管外面兩溫度爲30°C,160°C,求知皮中之溫度爲與管軸距離之函數,又求每日過長一米之管所失散之熱量爲何?

25. 24題中之汽管外包厚5糎之鎂($k=.00017$)皮,鎂皮外包厚5糎水泥(cement)($k=.0022$).求每日過長一米之管所失散的熱量如何?

26. 每糎長電阻0.1歐姆之線藏於水泥圓管中,管之內外二半徑爲0.5糎,1.0糎,5安培之電流使內外兩面溫度相差125°C.求水泥之傳導率爲何? $i$安培電流通電阻$R$歐姆之導線所生熱量爲

$$Q = .239Ri \text{ 秒卡 (calories per second).}$$

27. 鹽在液體中瀰散時.單位時內沿 $x$ 方向過垂直於 $x$ 方向之 $A$ 面積鹽流爲

$$DA\frac{dc}{dx}.$$

此式中 $D$ 爲瀰散率 (coefficient of diffusion), $c$ 爲在距離 $x$ 處之濃度.設半徑 $a$ 之鹽球浸入體積無限大之液體中,求在穩定狀態之下與球中心距離 $r$ 處之濃度如何?設濃度在球面上爲其飽和時之價值,而在無窮爲零.

28. 光通過一薄層水時,其被吸收之部份與其投射於水面上之全部份及水層之厚度爲正比.設若光透10呎深時其一半被吸收,其幾分能透至100呎深處.

29. 在孔道中含有2.5 𣋑鹽之一塊 inert 物質,在 50公升水中被搖動,過5分鐘1 𣋑鹽已溶解,鹽之百分之99至何時方被溶解?設其溶解率與未溶解之鹽量爲正比,又與所有溶液與飽和溶液兩濃度之差爲正比(溶液飽和時每公升含有0.3 𣋑).

30. 一塊不可溶解之物質,在其孔道中含有 15 𣋑鹽,而在 150 公升水中被搖動,過一小時鹽之一半已溶解,設若以300公升水過一小時,溶解之鹽如何?

31. 多孔物質在室內之乾燥率與其所含之濕氣爲正比,又與室內空氣與飽和空氣所含之濕氣之差爲正比.設含10磅濕氣之物質放在容積 2000立方呎之藏室內(空門關閉)

室內空氣原始百分之25爲濕氣,在所設之溫度,一立方呎飽和空氣約含有0.015磅濕氣.設該物質第一日失去其濕氣之一半,求其在第二日末之狀態如何?

32.　設若以通氣法使空氣之濕氣恆爲其百分之25,則31題內物質至何時方失去其濕氣百分之90?

33.　自一定點,所發來之諸光線在反射鏡面上反射後,皆與定直線爲平行,求知鏡形如何?以該定點爲原點,而定線平行於$x$軸,以$r$動徑及$x$坐標爲變數.

34.　在某反射望遠鏡中發來聚於一定點之諸光線,在鏡面上作反射後通過第二定點,求知鏡形如何?

35.　依牛頓之定律作用在與地球中心距離$r$,質量$w$磅之物體上之地引力爲

$$\frac{wR^2}{r^2}.$$

此式中$R$爲地球之半徑.設用波義耳定律而求空氣與距地球中心$r$之處的壓力爲何?設$p_0$爲空氣在地球面上之壓力.

36.　設每平方吋上受$p$磅重壓力之海水的密度爲其在海面上者之$(1+0.000003\,p)$倍,則深5英里之海面比設水不可壓縮時所有之面低450呎.

37.　設若機器帶與輪間之摩擦係數爲$\mu$摺角(angle of lapping)爲$\alpha$.並帶滑動時其在輪兩邊之張力$T_1$, $T_2$,則

$$T_2=T_1l^{\mu\alpha}.$$

試證明之.

38. 速度大時帶作用在輪上之壓力為離心力所減少,設帶單位長度之重為 $w$ 磅,並其速為 $v$,而求帶兩邊之 $T_1, T_2$ 兩張力所適合之方程式.

39. 一垂直傳力軸為平軸枕(flat step bearing)所托住,設枕水平表面之每方吋荷 $p$ 磅重(新枕),且摩擦係數為 $\mu$,求軸轉一次對着摩擦力所作的工為何?

舊枕在邊之磨損比在中心微多,究竟壓力變更致在各處之磨損相等.設在某點之磨損與在該點單位面積摩擦 $I$ 為正比,求壓力變化定律,且證明荷所設總重時,每一轉所作的工為在用新枕時者四分之三.

40. 在 Schieles pivot 中垂直傳力軸之底面及托軸之枕表面有特形,以致兩個之間沿法線壓力在新枕及舊枕皆恆等,問表面形必如何?

41. 2500 公升池中有 1250 公升水,而其餘容積滿每平方吋 50 瓩壓力之空氣.設若空氣依波義耳定律而膨脹,求水自底邊內直徑 5 糎之孔口全部被壓出需用之時間為何?不關孔口上小水頭(head of water)之壓力及外邊空氣之壓力.

42. 設 41 題內池中之液體為汽油,其比重為水之 0.7 倍,而求需用之時間如何?設放液公式中之 $C$ 係數對於水和汽油相同.

# 第　二　章

## 其他初級方程式

### 16. 適合微分方程式. (Exact Differential Equations)

$$Mdx+Ndy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(16a)$$

設有$u$函數,其全微分爲

$$du=Mdx+Ndy \cdots\cdots\cdots\cdots(16b)$$

則(16$a$)稱曰適合微分方程式.

(16$a$)式可書如

$$du=0,$$

所以其解爲

$$u=c.$$

微積學上證明$(Mdx+Ndy)$式之適合微分之充要條件爲

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \cdots\cdots\cdots\cdots(16c)$$

解(16$a$)式時須求有$(Mdx+Ndy)$微分之函數$u$.

設式中之諸項可排列爲若干部,其各部爲適合微分,則該式爲適合方程式,可求各部之積分而得$u$之值.

設不然,則可以(16 $c$)式審察方程式爲適合否?若知其爲

適合式,則

因 $$\frac{\partial u}{\partial x}=M.$$

可求得$u$之值.此式中之微係數爲偏者,故可求$u$對於$x$之偏積分而得

$$u=\int Mdx+f(y).$$

以 $y$ 爲常數時,求積分所生之積分常數,可爲 $y$ 之函數.$f(y)$之值可以$u$之全微分等於

$$(Mdx+Ndy)$$

條件求之.

大概$\int Mdx$式之微分中,各項含有$x$或$dx$爲因子,是以$df(y)$等於$Ndy$式中非含有$x$之諸項,故平常可以求$Ndy$中非含有$x$諸項之積分而得$f(y)$.在特別款中,以此法所得之結果或者不眞確,故結果應該以微分法覆驗之.

例 1. $$(x+y)dx+(2y+x)dy=0.$$

可書如

$$xdx+2ydy+(ydx+xdy)=0.$$

故爲適合而其解

爲 $$\frac{1}{2}x^2+y^2+xy=0.$$

例 2. $$e^ydx+(xe^y-2y)dy=0.$$

由(16a)

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^y)=e^y.$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^y-2y)=e^y.$$

上式適合於(16*a*)條件,故其爲適合式.

而
$$u=\int e^y dx+f(y)$$
$$=xe^y+f(y).$$
$$du=e^y dx+[xe^y+f'(y)]dy.$$

此式中 $f'(y)$ 爲 $f(y)$ 之微係數.

此式與原式比較

則知
$$f'(y)=-2y,$$

於是
$$f(y)=-y^2.$$

因只求所設微分之一個 $u$ 函數,故此式中無積分常數.

原式之解爲

$$u=xe^y-y^2=c.$$

注意. $(xe^y-2y)dy$ 中非含有 $x$ 之項爲 $-2ydy$, 亦可求此項之微分得 $f(y)$ 之值.

**17. 積分因數.** (Integrating Factors.)

$$Mdx+Ndy=0.$$

若非爲適合方程式,則可以相當因數乘之,而化爲適合式.如此之因數,謂之積分因數.

例如
$$ydx-xdy+xy^2dx=0.$$

以$y^2$除之,則得

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+xdx=0.$$

此式中,兩項皆爲適合微分.

故原式之解爲

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2=c.$$

$\frac{1}{y^2}$爲一個積分因數.

$Mdx+Ndy=0$類之方程式,常有積分因數,然而無一定求法.

## 18 平直微分方程式. (Linear Equations.)

設$P, Q$爲$x$之函數或常數,則

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (18a)$$

稱曰平直微分方程式.故平直方程式爲含一變數(18$a$式含$y$),及其微係數之一次方程式,該方程式可含第二變數之任何函數.

(18$a$)式之一個積分因數,

爲 $$e^{\int Pdx},$$

因以此因數乘(18$a$)式.

則得 $$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+ye^{\int Pdx}P=e^{\int Pdx}Q.$$

左邊爲$ye^{\int Pdx}$之微係數.

由此得解如

$$ye^{\int Pdx}=\int e^{\int Pdx}Qdx+c \cdots\cdots(18b)$$

例 1. $$x\frac{dy}{dx}+2y=x^4.$$

此爲含 $y,\frac{dy}{dx}$ 之一次方程式,故爲平直式.以 $x$ 除之則化成標準式(18$a$).

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^3.$$

$$\int Pdx=\int\frac{2}{x}dx=2\log x=\log x^2.$$

於是 $$e^{\int Pdx}=e^{\log x^2}=x^2.$$

則積分因數爲 $x^2$, 以 $x^2$ 乘兩邊而用微分.

則 $$x^2dy+2xydx=x^5dx.$$

左邊爲 $\frac{d}{dx}(x^2y)$. 所以所求之解爲

$$x^2y=\frac{1}{6}x^6+c.$$

例 2. $$(1+y)^2dx-(xy+y+y^3)dy=0.$$

此爲含 $x,dx$ 之一次方程式,以 $(1+y^2)dy$ 除之.

則得 $$\frac{dx}{dy}-\frac{y}{1+y^2}x=y.$$

$P$ 爲 $y$ 之函數,

$$\int Pdy=\int\frac{-y}{1+y^2}dy$$

$$=-\frac{1}{2}\log(1+y^2).$$

故 $$e^{\int Pdy}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

以此為積分因數乘兩邊而用微分.

則得 $$\frac{dx}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{xydy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}},$$

於是 $$\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}=\sqrt{1+y^2}+c,$$

而 $$x=1+y^2+c\sqrt{1+y^2}.$$

**19. 可簡化為平直式之方程式. (Equations Reducible to Linear Form.)**

設 $$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n \qquad (19a)$$

$P, Q$ 為 $x$ 之函數,若改易變數,可化此式為平直式,以 $y^n$ 除之.

則得 $$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q,$$

取 $y^{-n+1}=u$ 為新變數.

則 $$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+Pu=Q.$$

此為含 $u, \dfrac{du}{dx}$ 之一次方程式,故為平直式.

例 $$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{y^3}{x^3},$$

以 $y^3$ 除之.

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^3}.$$

設 $$u=y^{-2}.$$

於是

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx},$$

而 $$y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dx}.$$

以此值代入上式,則得

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^3}.$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{4}{x}u = -\frac{2}{x^3}.$$

此平直方程式之解爲

$$u = \frac{1}{3x^2} + cx^4.$$

故原式之解爲

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3x^2} + cx^4.$$

## 20. 齊次方程式. (Homogeneous Equations.)

代數式之次,依其所有變數之次,如解析幾何上之直線方程式,爲含坐標之一次的方程式,平直微分方程式爲含一變數及其微係數之一次方程式.設已規定所要算之變數,其乘積之次爲其中變數的指數之和.例如

$$x^2y,$$

爲含 $x$ 之二次式,

$y$ 之一次式,

及 $x, y$ 之三次式.

不拘次之定義如何,若一式爲有同次項之和,則稱曰齊

次式,例如

$$x^2+xy-y^2,$$

爲含 $x, y$ 之齊次式,其中各項爲二次者.

且通例 設 $t, x, y$ 有任何值時,

$$f(tx, ty)=t^n f(x, y) \cdots\cdots (20a)$$

則 $f(x, y)$ 稱爲 $x, y$ 之齊 $n$ 次函數 (homogeneous function of $n$th degree in $x$ and $y$.)

$\sqrt{x^2+y^2}$ 爲齊一次函數.因以 $xt, yt$ 代 $x, y$,

則得

$$f(tx, ty)=\sqrt{x^2t^2+y^2t^2}$$
$$=t\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=tf(x, y).$$

設

$$Mdx+Ndy=0 \cdots\cdots (20b)$$

微分方程式中 $M, N$ 皆爲 $x, y$ 之等次齊次函數,則稱爲齊次式.如

$$xdx+\sqrt{x^2+y^2}\,dy=0.$$

此爲齊次方程式,因 $dx, dy$ 之各係數皆爲齊一次函數.

要解含 $x, y$ 之齊次方程式.

代用

$$y=vx \cdots\cdots (20c)$$

或

$$x=vy.$$

含 $v, x$ 或 $v, y$ 所生之新方程式爲可分離者,於是可以離變數法解之.欲證明此義.

設

$$M=f_1(x, y), \quad N=f_2(x, y).$$

皆爲含$x, y$齊$n$次之函數.

由(20a) $$f_1(x, vx) = x^n f_1(1, v),$$

$$f_2(x, vx) = x^n f_2(1, v).$$

(20a)式中之$t, x, y$各數量爲$x, 1, v$所代用.代用$y = vx$,則得

$$\frac{M}{N} = \frac{f_1(1,v)}{f_2(1,v)} = f(v),$$

(20b)式可書爲

$$dy + \frac{M}{N}dx = 0,$$

或 $$vdx + xdv + f(v)dx = 0,$$

卽 $$[v + f(v)]dx + xdv = 0.$$

此方程式爲可分離者.

例 1. $$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

此爲齊一次方程式,代用$y = vx$,則得

$$x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) - vx = \sqrt{x^2 + v^2x^2},$$

因此 $$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}.$$

此爲可分離方程式,並其解

爲 $$x = c(v + \sqrt{1 + v^2}).$$

但 $v = \frac{y}{x}$,以此值代入,遷項平方之,

則得 $$x^2 - 2cy = c^2.$$

例 2. $$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0$$

解 $\frac{dy}{dx}$ 則得,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y},$$

由此 $$ydy+xdx=\pm\sqrt{x^2+y^2}dx.$$

此爲齊一次方程式,但以$\sqrt{x^2+y^2}$除之後求積分,更易於上法.

如 $$\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm dx.$$

由此 $$\sqrt{x^2+y^2}=c\pm x,$$

或 $$y^2=c^2\pm 2cx.$$

$c$ 之值既或正或負,此解可書爲

$$y^2=c^2+2cx.$$

## 21. 高次方程式. (Equations of Higher Degree.)

微分方程式中,含微係數之諸分數及根化去後所有之最高級微係數之次,謂其方程式之次.

例如 $$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+y=0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=1+\frac{dy}{dx}.$$

此兩式爲二次方程式,以前所解之式,大半爲一次者.

通例解高次方程式時,先解最高級微係數,後視同一次

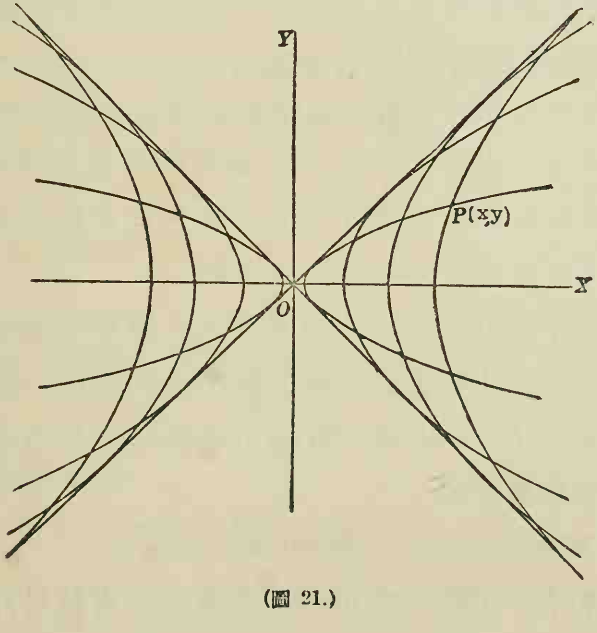
方程式解之.例如以上第一式可解$\frac{dy}{dx}$

得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-y^2}}{y}\qquad(21)$$

此爲齊次方程式.

初級一次方程式,對於每$(x, y)$點只決定一個斜度卽過該點之一個曲線;二次方程式大抵決定兩斜度乃過每$(x, y)$點之二曲線,故初級方程式之次,表明過一點之曲線數,然此曲線未必皆相異或眞實.

設自某點起沿屬於該點之一個斜度所表示之方向運動,通常只得一個在其各點切於微分方程式之微線的曲線,如此則可描寫積分曲線.設方程式爲高次者,則平常有兩(或




(圖 21.)

多)斜度相合之點在該點兩(或多)曲線相切,而不易決定何曲線爲繼續所描寫者.

例如(21)式屬於每點之兩斜度爲根號前正負號所分別,若根非等於零,則此兩斜度不同.但沿

$$x=y \quad 及 \quad x=-y$$

二直線,其斜度相等而曲線相切,此二直線在其各點切於積分曲線如(圖 21)所示,故其在各點的方向眞確而該二線爲微分方程式之解.

(21)之通解爲

$$y^2=2cx-c^2,$$

但以任何一定之値代 $c$ 不能得 $y=x$, $y=-x$ 兩解.此兩解稱曰奇解(singular solutions).

故高次方程式可有兩種解,其通解含一積分常數,所以代表無限多之曲線;另外可有一曲線,謂之交跡線(envelope).此交跡線在其各點切於通解之曲線,若此交跡線非爲通解曲線之一,則其方程式爲原式之奇解.

普通所解非單一問題,而爲含有各種原始條件的一類問題.例如設求自礮發之礮彈所沿之曲線,則得一般屬於諸仰角(angles of elevation)之曲線,所欲求之解爲無限多曲線所表示,故爲其通解.

**22. 變數之改易. (Change of Variable.)**

前解齊次方程式時,用 $v=\frac{y}{x}$ 爲新變數,對於任何方程式

有時可用某 $u$ 函數或某 $uv$ 兩函數爲新變數以簡化之.

設只知微分方程式,則其中所含某式可作相宜的新變數.如含 $y$ 之式只爲 $y^2$ 或 $y\frac{dy}{dx}$ 之類者,則用

$$y^2=u,$$

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{du}{dx},$$

可得較簡易之方程式.

設微分方程式爲在解問題時所發生者,則題中某重要之量可作相宜的新變數.立微分方程式時可隨意選定坐標軸,但通常多依題內諸條件選定之.例如設某二度 (two dimensional) 題內有對於某直線之對稱性,該線可作一相宜之坐標軸,設有對於某點之對稱性,該點可作相宜之坐標的原點(或曰極).若先選定相當的變數,則簡易立微分方程式之程序,而其解法更易,無用改易變數.

例
$$(x-y)^2\frac{dy}{dx}=a^2.$$

按上式可知

$$x-y=u,$$

爲相宜的代替法,如此則

$$1-\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}.$$

而原式成爲

$$u^2\left(1-\frac{du}{dx}\right)=a^2,$$

$$u^2-a^2=u^2\frac{du}{dx}.$$

此式爲可分離方程式,其解

爲 $$x=u+\frac{a}{2}\log\frac{u-a}{u+a}+c,$$

以 $(x-y)$ 代 $u$,

則得 $$y=\frac{a}{2}\log\frac{x-y-a}{x-y+a}+c.$$

## 23. 聯立方程式. (Simultaneous Equations.)

前所解諸方程式,皆含兩變數,其一可以爲自變數,他爲因變數,設有若干聯立方程式含一自變數及與方程式同數之因變數,則有時除一個外,其他因變數皆可消去,解此一因變數後代入他方程式內得完全之解.

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t),\qquad \frac{dy}{dt}=f(x,y,t).$$

此兩式爲最普通者,可解只含兩變數之第一方程式,得 $x$ 爲 $t$ 之函數,以此值代入第二方程式後解 $y$.

例 $$\frac{dx}{dt}=k_1x,\quad \frac{dy}{dt}=k_2(x-y).$$

解只含 $x,t$ 兩變數之第一方程式,

則得 $$x=c_1e^{k_1t}\qquad\text{(23a)}$$

以此值代入第二方程式,

則 $$\frac{dy}{dt}+k_2y=k_2c_1e^{k_1t}\qquad\text{(23b)}$$

含 $c_1$, $c_2$ 兩積分常數的 (23a), (23b) 二方程式爲原式之解.

# 習 題

1. $ydx+(x+y)dy=0.$

2. $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^2.$

3. $(x^2+y^2)dx+2xydy=0.$

4. $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-3y^2)dy=0.$

5. $ydx-(x+y)dy=0.$

6. $xdy+ydx=y^2dx.$

7. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0.$

8. $(x+y)dy-(y-x)dx=0.$

9. $\dfrac{dy}{dx}-y=e^x.$

10. $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3.$

11. $x^2\dfrac{dy}{dx}-2xy=3y.$

12. $(y-x)dy+dx=0.$

13. $(2xy^2-y)dx+xdy=0.$

14. $\tan x\dfrac{dy}{dx}-2y=2a.$

15. $(x^2-1)^{\frac{3}{2}}dy+(x^3+3xy\sqrt{x^2-1})\,dx=0.$

16. $\dfrac{dy}{dx}+y=xy^3.$

17. $x\dfrac{dy}{dx}-3y+x^4y^2=0.$

18. $ydx = (y^3 - x)dy$.

19. $xdx + ydy = xdy - ydx$.

20. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

21. $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$.

22. $(xy + x^2)dy + y^2dx = 0$.

23. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} - x = 0$.

24. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+y)\frac{dy}{dx} + xy = 0$.

25. $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + x^2$.

26. $y\frac{dy}{dx} + y^2 \cot x = \cos x$.

27. $(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)dy = 0$.

28. $3y^2\frac{dy}{dx} - y^3 = x$.

29. $e^y\left(\frac{dy}{dx} - 1\right) = e^x$.

30. $e^y\left(\frac{dy}{dx} + 1\right) = e^x$.

31. $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$.

32. $ye^y dx = (y^3 + 2xe^y)dy$.

33. $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)dx - x^2e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0$.

34. $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$.

35. $xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

36. $\frac{dx}{dt} + x = e^t$, $\quad \frac{dy}{dt} = x$.

37. $\frac{dx}{dt}+y=x,\qquad \frac{dy}{dt}=3y.$

38. $dx-2ydt=0,\qquad dy-(y+e^t)dt=0.$

39. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{x-y}=dt.$

## 問　題

1. 自一定點發來之諸光線，在反光鏡上作反射後，皆平行於一定直線，以直角坐標求鏡形如何.

2. 池內有含25瓩溶解之鹽的500公升鹹水，每分鐘15公升淡水入池，混合液以等率出池外而流過他500公升池.設該池原滿淡水，求過一小時其中之鹽如何?

3. $i$ 電流通過電阻 $R$ 之導線時，電動力為 $Ri$，通過自感係數 $L$ 之線輪時電動力為 $L\frac{di}{dt}$.設使含串連電阻 $R$ 之導體及自感係數 $L$ 之線輪的電路兩端之間電動力為

$$e=E\sin(\omega t).$$

$E,\omega$ 各為常數，設當 $t=0,\ i=0$ 而求在 $t$ 時之電流如何?

4. 設施

$$e=E\sin\omega t,$$

電動力於含串連之電阻 $R$ 的導體及電容阻流度 (capacitance) $C$ 之蓄電器的電路兩端之間，設起初蓄電器無電則過 $t$ 時作用在其兩板之間的電動力為

$$\frac{1}{c}\int_0^t i\,dt.$$

設當 $t=0, i=0$ 而求 $i$ 爲 $t$ 之何函數?

5. 今有電阻 $R_1, R_2$ 自感係數 $L_1, L_2$ 兩電路排連於電門兩極間,設通入兩路之總電流爲

$$i=I\sin\omega t.$$

且當 $t=0$ 通各電路內之電路爲零.求通各電路之電流及電門兩極間所作用之電動力爲何?

6. 滿密度 $\rho$ 之液體的圓筒,以 $\omega$ 角速旋繞其軸,究竟液體如同固體旋轉.設半徑爲 $a$,在中心之壓力爲 $p$,求在表面上之壓力爲何?設想與軸距離 $r$ 之微體積因在其各表面之壓力及所作用之離心力爲平衡.

7. 含氣體之圓筒,以 $\omega$ 角速旋繞其軸.設 $p$ 爲壓力,$\rho$ 爲密度,$k$ 爲常數,而波義耳定律

$$p=k\rho.$$

求氣體壓力和與軸之距離 $r$ 之相關.

8. 兩相平行圓環之兩中心連線垂直於其平面,求其間之皂膜的幾何形式.設表面張力爲過表面上任何途徑單位長之 $T$ 常切力,且不關皂膜之重量.

9. $e$ 電荷在距離 $r$ 之處生靜電力

$$\frac{e}{r^2}.$$

若有曲線在其每點作用之合力方向,與其在該點之切線相合,則稱爲力線.設有 $e_1$ 電荷在原點,$e_2$ 電荷在 $x=a, y=0$

點,證明此兩電荷所生之力線方程式如下:

$$\frac{e_1x}{r_1}+\frac{e_2(x-a)}{r_2}=c.$$

10. 等電位面在其每點垂直於力線,求9題內 $e_1, e_2$ 兩電荷所生之等電位面方程式.

11. $$y=x\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dy}.$$

此式之通解表示拋物線之切線,並該拋物線方程式爲原式之奇解,證之.

12. 曲線之漸伸線(involute)爲原曲線諸切線之一直交曲線.

$$y=-x\frac{dx}{dy}-\frac{dy}{dx}.$$

式爲代表11題內拋物線之漸伸線微分方程式,證明之.簡化上式爲

$$Mdx+Ndy=0$$

類之式,後用

$$\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2}},$$

積分因數解之.

13. 在化學反應中 $c$ 物質分解成 $x, y$ 兩物質, $x, y$ 之生成率與 $c$ 所有分量爲正比,設初時 $c=1, x=0, y=0$, 且過一小時, $c=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{8}, y=\frac{3}{8}$, 求 $x, y$ 爲 $t$ 之何函數?

14. 在某化學反應中,$x$之一分子消毀時,$y$之一分子產生,此作用之率與$x$所有分量爲正比,同時因逆反應,$y$變爲$x$,其變化率與$y$所有分量爲正比,化學分析結果如下:

| | | |
|---|---|---|
| $t=0,$ | $3,$ | $\infty,$ |
| $x=10,$ | $6,$ | $5.5,$ |
| $y=0,$ | $4,$ | $4.5.$ |

求$x, y$爲$t$之何函數?

15. 輻射物質之變化率與其所有之分量爲正比,因$R_aB$之一分子分解,則產$R_aC$之一分子.過27分鐘$R_aB$質消去一半,同樣$R_aC$質分解,過19.5分鐘消去一半.設初時有$R_aB$之一分子,求過一小時$R_aB, R_aC$之各分量爲何?

16. 設細菌之增加率與所有之細菌數爲正比,但其產生毒素,此毒素毀滅細菌之率與細菌數及與毒素之分量爲正比,又設毒素之產生率與活細菌數爲正比,則細菌數漸增至最大值,後漸損至零值,且過$t$時爲

$$N=\frac{4M}{(e^{kt}+e^{-kt})}.$$

此式中$M$爲最大數,$t$自數量最大時量計,試證明之.

17. 物質對於一點對稱的分佈時,設用相當單位,其在與該點距離$r$之處的引力(gravitational attraction.)

爲 $$F=\frac{m}{r^2}.$$

此式中$m$爲半徑$r$球面內之質量,在某物理狀態中與

力同有與$F^2$爲正比密度之能(energy),依相對論$E$量之能的質量爲

$$\frac{E}{C^2}.$$

($C$爲光速)設此質量吸引如同普通質量,則在吸引的球體外之引力定律爲

$$F=\frac{M}{r(r+a)}.$$

此式中$M$爲總質量(無窮大之引力場在內),$a$爲常數.

# 第 三 章

## 二級方程式之特類

## (Special Types of Second Order Equations)

### 24. 通論.

含二變數($x$為自變數,$y$為因變數)之二級微分方程式如下:

$$f\left(x, y\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24a)$$

解 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 則得如下之一或多式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24b)$$

大概解此種式時化為適合微分方程式

$$\frac{d}{dx}u\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

上式之解為

$$u\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24c)$$

此為初級方程式.解$y$

則得 $$y=F(x, c_1, c_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24d)$$

故解二級方程式須重求積分,是以通解含兩積分常數,在 (24c) 式中,可以隨意值代 $x, y, \frac{dy}{dx}$,則得 $c_1$, 後以 $x, y, c_1$ 之值代入 (24d) 得 $c_2$. 在最簡款中過每點有無限多積分曲線,沿每一方向有一曲線,在較複雜款中,過一點可有同方向之若干曲線〔例如當(24a)爲高次式〕,且在某點諸曲線之一部份或全數可爲虛.

設 (24d) 式不能簡化爲

$$y=f(x, c) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24e)$$

$c$ 爲 $c_1$ 及 $c_2$ 之函數,則 $c_1, c_2$ 兩常數稱爲獨立者(independent). 例如:

設 $$y=x^2+c_1+c_2.$$

可以 $c$ 代 $(c_1+c_2)$ 書如下:

$$y=x^2+c.$$

此式只含單一常數,故 $c_1, c_2$ 兩常數非獨立者.

二級微分方程式之通解含有兩積分常數,反言之,設如 (24d) 類之任何方程式爲 (24b) 二級方程式之解,則可證明其所代表之諸曲線與任何其他含兩獨立常數之解所代表者同.故依此義爲通解,故若以試法可得含兩獨立常數之解,卽爲通解.

**25. 直接可解之方程式. (Equations Immediately Integrable.)**

設
$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

此式可重求積分直接解之.由第一次積分法

得
$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)dx=f_1(x)+c_1.$$

此$f_1(x)$爲求$f(x)dx$之積分所生之函數,由第二次積分法則得通解如下:

$$y=\int[f_1(x)+c_1]dx=f_2(x)+c_1x+c_2.$$

**26 非含$y$之方程式.**

二級方程式中,若 $y$ 只含在微係數內,則可解第二微係數而化如下式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (26a)$$

取
$$p=\frac{dy}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots (26b)$$

爲新變數,

則
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}.$$

且 (26$a$) 式可書

$$\frac{dp}{dx}=f(x, p).$$

上式爲含 $x, p$ 變數之初級方程式,其解如下:

$$p=F(x, c_1).$$

$c_1$ 爲積分常數, 以 $\frac{dy}{dx}$ 代 $p$,

則有
$$\frac{dy}{dx}=F(x, c_1),$$

由此　$$y=\int F(x, c_1)dx,$$

$$y=\phi(x, c_1)+c_2.$$

例　$$(1+x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0.$$

以 $p$ 代 $\frac{dy}{dx}$,

則得　$$(1+x)\frac{dp}{dx}+p=0,$$

此爲適合方程式.

其解爲　$$(1+x)p=c_1.$$

以 $\frac{dy}{dx}$ 代 $p$, 後分離變數

得　$$dy=\frac{c_1dx}{1+x}.$$

由此　$$y=c_1\log(1+x)+c_2.$$

## 27. 非含 $x$ 之方程式.

非含 $x$ 之方程式可簡化如下式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (27a)$$

取　$$p=\frac{dy}{dx} \qquad (27b)$$

爲新變數而書第二微係數如下:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy} \qquad (27c)$$

以代替法則 (27$a$) 式如下:

$$p\frac{dp}{dy}=f(y, p).$$

此為初級方程式,可解 $p$. 以 $\frac{dy}{dx}$ 代 $p$ 得初級方程式,後以離變數法解之.

例 $$y\frac{d^2y}{dx^2}=y^2\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

取

$$\frac{dy}{dx}=p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy},$$

則得 $$yp\frac{dp}{dy}=y^2p+p^2.$$

以 $p$ 除之,

$$y\frac{dp}{dy}=y^2+p.$$

此式之解為

$$\frac{p}{y}=y+c_1.$$

由此 $$p=\frac{dy}{dx}=y(y+c_1),$$

而 $$x=\int\frac{dy}{y(y+c_1)}=\frac{1}{c_1}\log\frac{y}{y+c_1}+c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (27d)$$

解上式時以 $p$ 除之則失去,其解如下:

$$p=0,$$

由此 $$y=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (27e)$$

然而此解只含一積分常數,而所欲求之通解,却含兩個.設有含兩原始條件之問題,則 (27e) 式不能為所欲求之解.

## 28. 二級平直方程式. (Linear Equations of the Second Order.)

設 $$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)y=f_3(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (28a)$$

此式爲含 $y$ 及其微係數之一次方程式,故稱曰平直方程式 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 皆爲常數時之特款,在下章研究之.

大抵含 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 變係數之平直方程式,不可以前法解之.然而有時或已知或以試法可得下短略方程式之特解.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f_1(x)\frac{dy}{dx}+f_2(x)y=0 \quad\cdots\cdots(28b)$$

設 $y=u$ 爲此解,

即 $$\frac{d^2u}{dx^2}+f_1(x)\frac{du}{dx}+f_2(x)u=0.$$

取 $$y=uv,$$

則可化原式(28a)成非直接含 $v$ 之式,所得之式可以 § 26 中之法解之,則所欲求之解

爲 $$y=uv.$$

若微分方程式在解問題時發生,有時可解該題之某簡款而得 $u$ 函數.

欲表示上代替法之効果,在(28a)式中以 $uv$ 代 $y$, 則遷項後得

$$u\frac{d^2v}{dx^2}+\left[uf_1(x)+2\frac{du}{dx}\right]\frac{dv}{dx}+\left[\frac{d^2u}{dx^2}+f_1(x)\frac{du}{dx}+f_2(x)u\right]v=f_3(x).$$

由(28c)式 $v$ 之係數爲零,

故 $$u\frac{d^2v}{dx^2}+\left[uf_1(x)+2\frac{du}{dx}\right]\frac{dv}{dx}=f_3(x).$$

$u$ 旣爲 $x$ 之已知函數,

可取 $$\frac{dv}{dx}=p,$$

而化上式爲含$p$之初級平直方程式

例 $$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=x^2.$$

短略方程式爲

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

欲求一特解,試取

$$y=x^m,$$

則 $$[m^2-2m+1]x^m=0.$$

故$m$必適合於

$$m^2-2m+1=0.$$

是以 $$m=1,$$

特解則爲 $$y=x.$$

代 $$y=xv,$$

原式則成 $$x^3\frac{d^2v}{dx^2}+x^2\frac{dv}{dx}=x^2,$$

其解爲 $$v=x+c_1\log x+c_2,$$

由此 $$y=vx=x^2+c_1x\log x+c_2x.$$

## 習題

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin x=0.$

2. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+x^2.$

3. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+x=0.$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}=x.$

5. $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0.$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=y.$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0.$

8. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

9. $(x+1)\dfrac{d^2y}{dx^2}-(x+2)\dfrac{dy}{dx}+x+2=0.$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y\dfrac{dy}{dx}=0.$

11. $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}=x.$

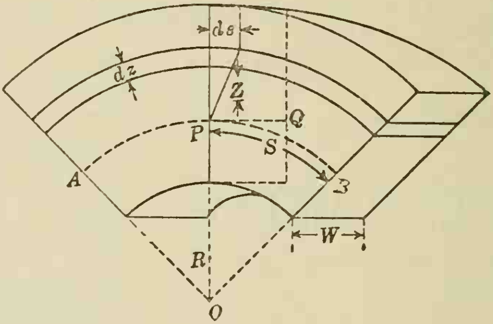
12. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-3y=x^2.$

13. $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}-2y=x.$

14. $x\dfrac{d^2y}{dx^2}-(x+3)\dfrac{dy}{dx}+3y=0.$

## 29　橫梁之彎曲. (Deflection of Beams.)

橫梁爲垂直力所彎曲時,如圖(29$a$),上部之纖維伸,下部者縮.有一中立曲線$AB$,沿此線之纖維非伸亦非縮,此$AB$曲




(圖 29a)

線在 $P$ 點之曲率與某半徑 $R$ 圓之曲率相等,欲計算彎曲梁所需用之偶力之矩(或扭力). 則設垂直於梁軸之平剖面恆爲平面,且設在如此之一剖面上之纖維彎曲成曲線,該曲線皆有同曲率中心 $O$.

由上圖,自然長度 $S$ 之纖維伸長或壓縮 $ds$,如下式所示:

$$\frac{ds}{Z}=\frac{S}{R}.$$

此式中 $Z$ 爲該纖維與中立曲線之距離,依虎克定律在 $Z$, $(Z+dz)$ 間纖維之張力爲

$$T=E\,wdz\cdot\frac{ds}{S}=E\,wdz\cdot\frac{Z}{R}.$$

此 $E$ 爲梁質之伸長彈性係數 (stretch modulus of elasticity), $w$ 爲梁之寬,因沿梁長方向合力爲零,則

$$\int Ewz\frac{dz}{R}=\frac{E}{R}\int wzdz=0.$$

但若剖面面積爲 $A$,而其重心與中立曲線之距離爲 $\bar{Z}$,則

$$A\bar{Z}=\int wzdz.$$

故 $$\bar{Z}=0.$$

即中立曲線通過各剖面之重心,總應力繞垂直於梁之橫軸 $PQ$ 之矩為

$$M=\frac{E}{R}\int wz^2dz=\frac{EI}{R}\cdots\cdots(29a)$$

$I$ 為剖面面積繞 $PQ$ 軸之惰性矩 (mom nt of inertia).

設 $x$ 軸為橫軸, $y$ 為縱軸, $P$ 為 $(x, y)$ 點,因斜度通常很小.

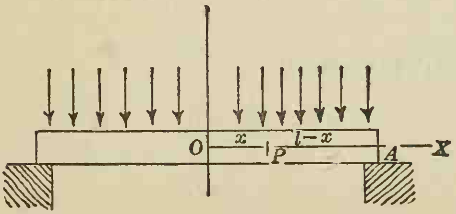
$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{d^2y}{dx^2}\ (\text{約})$$

故 (29a) 可書為

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M\cdots\cdots(29b)$$

$M$ 稱曰彎力矩 (bending moment), 其為在 $P$ 一邊諸力繞 $P$ 點之矩之總,向上作用者力矩為正,向下者力矩為負,求梁彎成何曲線,則決定 $M$ 為 $x$ 之函數,後解 (29b)微分方程式.

例 長 $2l$ 之梁支其兩端,而其單位長度之荷重 (load) 為 $w$. 求其彎曲如何?




(圖 29b)

取梁之中心爲原點 (圖 29$b$), 因總荷重爲 $2lw$, 則在兩端各柱向上推力爲 $lw$. 設想 $P$, $(x, y)$, 點右邊之力在 $A$ 端作用向上推力 $lw$, 其繞 $P$ 之矩爲

$$wl(l-x).$$

另外作用於 $PA$ 段上只有 $P$, $A$ 兩點間之荷重 $w(l-x)$. 因荷重分佈均勻一致,可以此力爲過該段之重心作用. 此重心與 $P$ 之距離爲 $\frac{1}{2}(l-x)$, 其繞 $P$ 之矩則爲

$$-w(l-x)\cdot\frac{1}{2}(l-x).$$

用負號因其力向下作用,是以繞 $P$ 之總力矩爲

$$M=wl(l-x)-\frac{w}{2}(l-x)^2$$

$$=\frac{1}{2}w(l^2-x^2).$$

(29$b$) 微分方程式則爲

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}w(l^2-x^2).$$

求第一積分得

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}w\left(l^2x-\frac{x^3}{3}\right)+c_1.$$

因梁在其中心爲橫平,

當 $$x=0,\quad \frac{dy}{dx}=0.$$

故 $$c_1=0.$$

再求積分得

$$EIy=\frac{1}{2}w\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{x^4}{12}\right)+c_2.$$

因已設原點在曲線上,則 $c_2=0$. 於是彈性曲線方程式如下:

$$EIy=\frac{1}{2}w\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{x^4}{12}\right),$$

梁與直線最大之位差,在一端 $(x=l)$,

故爲
$$y=\frac{5}{24}wl^4.$$

此通稱爲橫梁之彎曲 (deflection).

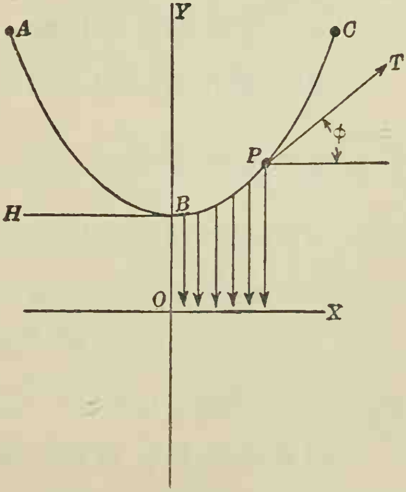
### 30. 纜之平衡. (Equilibrium of a Cable.)

設(圖 30)內, $ABC$ 爲在 $A, C$ 二點拴住之十分柔的一條纜,其荷重不定如何,取 $OX$ 爲橫軸, $OY$ 過曲線最低點 $B$. 設想纜在 $B$ 與曲線上變點 $P$ 間之部分,該部分因下三力之作用爲平衡.

(1) 因纜之 $AB$ 部分在 $B$ 點所起之水平張力 $H$.

(2) 因纜之 $PC$ 部分沿在 $P$ 點切線作用之張力 $T$.

(3) 纜之 $BP$ 部分向下作用之重量 $W$.




(圖 30)

若纜爲平衡,向右之總

分力與向左者必相等;又向上作用者與向下者亦必相等.

故
$$\left.\begin{aligned} T\cos\phi &= H \cdots\cdots \\ T\sin\phi &= W \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (30a)$$

以第一式除第二式,

則得
$$\frac{dy}{dx} = \tan\phi = \frac{W}{H} \cdots\cdots (30b)$$

$H$ 既為常數,若 $W$ 為 $x$ 之已知函數,上式可隨卽解之.有時不知 $W$,但易決定其微係數,由微分法

則得
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx} \cdots\cdots (30c)$$

求 (30$b$) 式或 (30$c$) 式之積分,則得曲線方程式.其解含有 $H$ 常數,欲求 $H$ 之值,以纜兩端之坐標及 $B$ 點坐標或纜之長代入式中卽得.

31. 質點沿直線運動.

設 $F$ 為作用於質量 $m$ 之質點上諸力之合力,$a$ 為其加速,則

$$F = ma \cdots\cdots (31a)$$

用此公式時,須以相當單位量計其力及質量,克糎單位制度中,以克計量質量,以達計量力.由 (31$a$) 式一達為作用於一克質量上時生一秒秒糎加速之力,在英國通常以磅計量質量,以 poundal 計量力, 32.174 poundals 等於一磅之重力.

無論如何,若 $g$ 為在某處之重力加速,則在該處作用於 $m$ 質量上之 $F$ 重力,如下式所示:

$$F=mg.$$

質點沿直線運動時,設其與在直線上一定點之距離為 $s$(憑其方向定其正負號),則質點之速為

$$v=\frac{ds}{dt}\quad\cdots\cdots(31b)$$

且其加速為

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\quad\cdots\cdots(31c)$$

用上二式時可取直線上任何方向為正,$F, s, v, a$ 各量所沿之方向與所取之正方向相同時,其號皆為正,相反時其號皆為負.

例　物體在液體中漸沈時,所遇之抵抗力與其速為正比.設起初質點靜止,求其運動如何?

設 $t$ 秒內物體沈下 $s$ 距離($s$ 向下方向為正),若其質量為 $m$,重力加速為 $g$,則作用在其上之重力為

$$mg.$$

此力向下作用,故為正;向上作用與速度為正比之抵抗力為

$$-kv.$$

此式內 $k, v$ 皆為正,於是總力為

$$F=mg-kv.$$

故(31$a$)式可書為

$$mg-kv=ma=m\frac{dv}{dt}\quad\cdots\cdots(31d)$$

分離變數後求積分,

則得 $$\log(mg-kv) = -\frac{k}{m}t + c_1.$$

但當 $$t=0,\ v=0.$$

故 $$\log(mg) = c_1 \quad \cdots\cdots\cdots (31e)$$

以 (31*d*) 式減 (31*e*) 式後解之,

則 $$mg-kv = mge^{-\frac{k}{m}t}$$

因 $v = \frac{ds}{dt}$,可再求積分,

得 $$mgt - ks = -\frac{m^2g}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + c_2.$$

但當 $$t=0,\ s=0,$$

故 $$c_2 = \frac{m^2g}{k}.$$

以此值代入上式,解 $s$,

則 $$s = \frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \frac{mg}{k}t.$$

## 32. 複系之運動. (Motion of a Complex System.)

設物體或物體系之總質量為 $M$,作用在其上諸力之合力為 $F$,則其重心之加速為下式所決定.

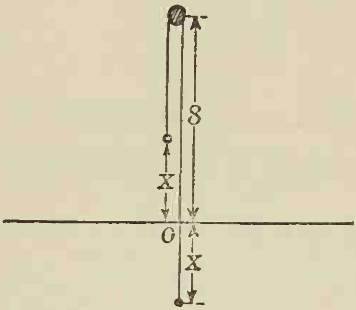
$$F = Ma \quad \cdots\cdots\cdots (32)$$

即重心之運動與當全質集合在重心點而諸力皆作用在該點上時,其所有之運動相同.

若物體之各部以相等速沿相同方向運動,上式則決定物體中任何點之加速.若複系(如鏈)之各部,皆以同速沿同途

徑運動,且沿該途徑之分力爲$F$,則(32)式決定沿途徑之加速

例　一鏈懸於滑木釘之上,其長 6 呎之段在此邊,長 10 呎之段在彼邊,求鏈離木釘之時爲何?



(圖 32)

若鏈之兩端皆在木釘下距離 8 呎之直線上,鏈則爲平衡.設鏈較高端與此線之距離爲 $x$(圖 32),若長一呎之鏈的質量爲 $\rho$,則非平抵之力爲鏈長 $2x$ 呎段之重量

$$2x\rho g.$$

生加速之總質量爲 $16\rho$,

於是
$$16\rho\frac{d^2x}{dt^2}=2\rho gx.$$

求積分則得
$$8\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=gx^2+c.$$

起初
$$x=2,\ \frac{dx}{dt}=0,$$

故
$$c=-4g.$$

而
$$8\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=g(x^2-4).$$

分離變數後再求積分

則得
$$t=\sqrt{\frac{8}{g}}\int_2^8\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\sqrt{\frac{8}{g}}\log(4+\sqrt{15}).$$

## 33. 平面上之運動

質量$m$之質點在平面上或在空間中運動時，其加速仍適合於下式：

$$F=ma.$$

但$F$, $a$二量爲向量(vector quantities)，有大小，亦有方向.欲得方程式,其中諸項爲數量,則求向量在一直線上之正影,若$F$沿某直線之分爲$F_x$, $a$沿同線之分爲$a_x$,

則
$$F_x=ma_x.$$

設質點在平面上運動,其直角坐標爲$(x, y)$，沿兩坐標軸之分加速則如下：

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

若$F_x$, $F_y$爲沿兩軸之分力，則質點之運動爲下二式所決定：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y \quad\cdots\cdots\cdots(33a)$$

有時極坐標更便宜.質點在$P$點時(圖33a)，其速度分爲沿$OP$定線之$v_r$分及沿垂直於$OP$線之$PQ$線的$v_\theta$分速,此兩分速之值如下：

$$v_r=\frac{dr}{dt}, \qquad v_\theta=r\frac{d\theta}{dt} \quad\cdots\cdots\cdots(33b)$$

同樣加速亦分爲沿$OP$之$a_r$分及沿$PQ$之$a_\theta$分,欲求此兩分加速之值,必射速度在$OP$, $PQ$二線上之正影,而求該影之

變化率,質點由 $P$ 至 $P'$ 運動時,其速度在 $OP$ 上之正影所生之變化

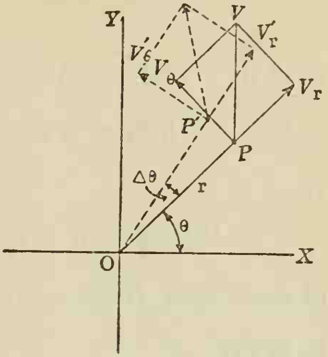
爲 $$v'_r\cos(\Delta\theta)-v'_\theta\sin(\Delta\theta)-v_r,$$

因不計 $\Delta\theta$ 之平方時,

$$\cos(\Delta\theta)=1,\quad \sin(\Delta\theta)=\Delta\theta.$$

故上式可書

$$(v'_r-v_r)-v'_\theta\Delta\theta.$$




(圖 33a)

於是

$$a_r=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{v'_r-v_r}{\Delta t}-v'\theta\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right]$$

$$=\frac{d(v_r)}{dt}-v_\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

以 (33b) 式之值代 $v_r$, $v_\theta$.

則得 $$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad\cdots\cdots\cdots(33c)$$

同樣亦得

$$a_\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\quad\cdots\cdots\cdots(33d)$$

若作用在質點上之力,沿 $OP$ 之分力爲 $F_r$,垂直於 $OP$ 之分力爲 $F_\theta$,則可解下二式求質點之運動:

$$ma_r=F_r,$$

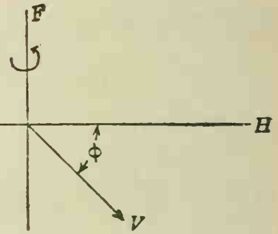
$$ma_\theta=F_\theta\quad\cdots\cdots\cdots(33e)$$

例　帶 $e$ 電荷之電子在 $H$ 強度之磁場中以 $v$ 速度運動時,其受橫力之作用如下:

$$F=\frac{e}{c}vH\sin\phi.$$

此式中 $c$ 爲光速, $\phi$ 爲 $v$, $H$ 兩方向所成之角, 力之方向垂直於 $v$ 及 $H$, 並 $v$ 方向若繞 $F$ 自右旋轉 $\phi$ 角, 則與 $H$ 方向相合.

若 $H$ 爲常數, 且電子初速爲 $v_0$, 方向在垂直於 $H$ 之一平面上, 求其途徑如何?



(圖 33b)

設電子自原點起, 以初速沿 $x$ 軸因垂直於 $xy$ 平面之分力爲零, 質點仍在該平面上運動, 故 $\phi=90°$, 並

$$F=\frac{e}{c}vH.$$

$v$ 之二分速爲

$$\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt}.$$

因 $F$ 垂直於 $v$, 大小爲 $\frac{e}{c}vH$, 其分力爲

$$-\frac{e}{c}H\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{e}{c}H\frac{dx}{dt},$$

正負號可由下圖決定之, 於是運動方程式如下:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{eH}{c}\frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{eH}{c}\frac{dx}{dt}.$$

上式之積分可直接求之

得
$$m\frac{dx}{dt}=-\frac{eH}{c}y+mv_0.$$

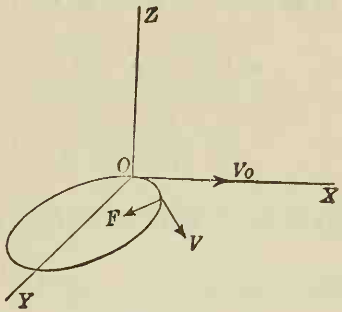
$$m\frac{dy}{dt}=\frac{eH}{c}x.$$

上式之積分常數因當 $t=0$,

$$x=0,\qquad y=0,$$

$$\frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=0,$$

決定之.



(圖 33c)

第二式以第一式除之,

得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{eHx}{cmv_0-eHy},$$

化去分數後求積分,

則得
$$eH(x^2+y^2)-2cmv_0y=0;$$

因當 $x=0, y=0$, 故上式中之積分常數爲零,電子之途徑爲半徑 $\frac{cmv_0}{eH}$ 之平圓.

例 2. 質量 $m$ 之質點受向原點之引力

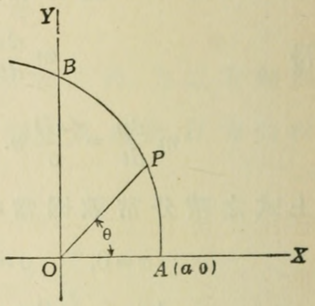
$$\frac{mk^2}{r^3},$$

若其自 $(a,0)$ 點以 $v_0\left(>\frac{k}{a}\right)$ 之速度沿垂直於 $x$ 軸之方向起動,求所行之途徑如何?

用極坐標時,以自原點向外爲 $r$ 之正方向,於是力爲

$$F_r=-\frac{mk^2}{r^3},$$

$$F_\theta=0.$$



(圖 33d)

運動微分方程式則如下:

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-\frac{mk^2}{r^3}$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0.$$

第二式可直接求其積分,

得 $$r^2\frac{d\theta}{dt}=c_1.$$

起初 $r=a$, 並

$$r\frac{d\theta}{dt}=v_0,$$

故 $$c_1=av_0,\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{av_0}{r^2}.$$

以此值代入第一方程式,

則 $$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{a^2v_0^2-k^2}{r^3},$$

以 $\left(\frac{dr}{dt}\cdot dt\right)$ 乘之,

$$\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\cdot dt=\frac{a^2v_0^2-k^2}{r^3}dr,$$

由此則

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=(a^2r_0^2-k^2)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right).$$

此式中積分常數由當 $r=a, \frac{dr}{dt}=0$ 條件決定之. 上式以

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{a^2v_0^2}{r^4}\text{除之,}$$

則得

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{a^2v_0^2-k^2}{a^4v_0^2}r^2(r^2-a^2).$$

解此式後,因當 $\theta=0,\ r=a$ 決定常數之值,得途徑方程式如下:

$$r=a\sec\left[\frac{\sqrt{a^2v_0^2-k^2}}{av_0}\theta\right].$$

## 問　題

1. 有長 $2l$ 之橫梁支其兩端,當中點荷重 $W$,求其彎曲

2. 一大臂的一端固定水平,他端荷重 $W$,求其彎曲如何?

3. 一端固定之大臂,其各單位長度之段荷重 $W$,求其彎曲如何?

4. 在兩端及中點支住之橫梁,每單位長度荷重 $W$,求其彎曲如何?

5. 有一大臂 (cantilever beam),其一端固定,他端支住,每單位長度荷重 $W$,其彎曲爲何?解此題須以符號代表在他端之支力,解微分方程式後利用在兩端適合之條件以求其值.

6. 橫梁之兩端定住,每單位長度荷重 $W$,求其彎曲如何?

7. 有長 $l$ 之垂直柱,其荷重爲 $P$, 設荷重使上端離垂線之移位爲 $a$, 求彎力矩及柱所彎成之曲線?代用上端之坐標,證柱所能支最大荷重爲

$$P=\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EI.$$

8. 設柱之兩端爲圓形, 但仍在同一垂線上, 求最大荷重爲何?

9. 懸橋之一鋼索, 每單位橫長度之荷重爲 $W$, 不計鋼索自身之重量,求其懸成何曲線?

10. 均勻一致鋼索之兩端繫住, 求其因自身之重量懸成何曲線?

11. 電報線每哩長重量爲 173 磅, 設線桿相隔 400 呎, 線在兩桿中間之沈度 (sag)爲 10 呎. (線重沈下 10 呎之距離), 求在線最低點之張力.

12. 石橋之弧托水平道路, 其構造法使在弧之各點因上邊材料作用之合應力爲沿切線之壓縮,求弧形如何?

13. 一列長度不同直徑相同之桿,在一條繩上懸着, 桿相隔等橫距離,且其下端在一直線上, 設桿相隔很近,使繩之荷重爲連續的,求繩形如何?

14. 設彈弦之長與張力爲正比, 求在兩端繫住時,弦因自身之重,懸成何曲線?

15. 質量 $m$ 之質點受向原點大小等於距離之 $k$ 倍的

引力,若初在與原點距離 $a$ 之處靜止,求其運動.

16. 質量 $m$ 之質點向定中心運動,該中心推斥力之大小等於 $k^2m$ 與距離之乘積,若初自距離 $a$ 之處以 $ka$ 速度開動,其不斷的接近中心而永不及之,試證明之.

17. 質量 $m$ 之質點,受

$$\frac{mk^2}{r^3}$$

之引力沿直線向力中心運動,$r$ 爲其與力中心之距離,若質點起初靜止在距離 $a$ 之處,求其至中心需幾何時?

18. 設地球作用在物體上之引力與其距地球中心之距離爲平方反比,物體自無窮遠處落下,求其至地球時之速度?比例常數可由在地球面上已知之 $g$ 加速得之.

19. 設每秒中落至地球面之隕石 (meteoric material), 總量爲 $M$, 設其自無窮遠處落起,且一致的散布在地球面上,求其空間中與地心距離 $r$ 之處的密度.

20. 設一穿孔過地球中心,其中之落體受向中心大小與距離爲正比之引力,求過穿孔之時.

21. 設空氣之抵抗與運動物件之速度之平方爲正比,若起初靜止,落體之速度漸近 $V$ 極限值,求其運動方程式.

22. 質點以速度 $v_0$ 垂直向拋射,設空氣之抵抗爲 $k$ 與速度之平方之乘積,求其回地時之速度.

23. 長 6 呎之鏈在平滑棹上,其長 1 呎之段過棹邊懸着,

不計摩擦,求鏈離棹之時.

24. 棹面比地高 3 呎,長 6 呎之鏈過棹邊懸着,其下端至地,求鏈離棹之速度.

25. 鏈在滑木釘上懸着,其長 8 呎之段在釘此邊,長 10 呎之段在彼邊,若摩擦力等於鏈長 1 呎段之重量,求鏈離木釘所須之時.

26. 某射彈之放射速爲 2500 秒呎,方向與水平線成 $45^\circ$ 角,不計空氣之抵抗,求其所至最高處及其至地之點各爲何?

27. 射彈之放射速爲 $v_0$,仰角爲 $\alpha$,若空氣之抵抗爲 $kv$ ($v$ 爲速度,$k$ 爲常數),求其兩運動方程式.

28. 質點受向原點大小與距離爲正比之引力,若其自 $(a, 0)$ 點以垂直於 $x$ 軸之 $v_0$ 速起動,求所行途徑如何?

29. 設 28 題內質點受大小與距離爲正比之推力,求其途徑如何?

30. 在 § 33 [例 1] 中求 $x, y$ 爲時間之何函數.

31. 電子在 $H$ 強度之磁場中運動,若其初速大小爲 $v_0$,方向與 $H$ 成 $\alpha$ 角,求所行途徑爲何?

32. 試證 (33 $d$) 方程式.

33. 質量 $m$ 之質點,受向原點大小

$$\frac{k^2m}{r^5}$$

之引力,若其自 $(a, 0)$ 點以垂直於 $x$ 軸之

$$v_0=\frac{k}{a^2\sqrt{2}}$$

速度起動,求其所行途徑方程式.

34. 設質點以等速沿

$$r=a\cos\theta$$

平圓運動,作用之力為向圓中心大小恆等者,試證之.

35. 設質量 $m$ 之行星受向太陽大小等於

$$\frac{km}{r^2}$$

之引力, $r$ 為行星與太陽之距離,行星距太陽最近時其距離為 $r_0$, 速度為 $v_0$, 求其軌道如何?

36. 求彗星之軌道如何,設其與太陽最小距離為 $r_0$, 且在無窮遠處之速度為零.

37. 曲線之弧及弦間之面積等於弦與在其兩端之切線所成三角形面積的三分之二,求曲線方程式.取原點在曲線上及兩切線之一為 $y$ 軸.

38. 依相對論如質點靜止時之質量為 $m_0$, 其作 $v$ 速運動時之質量為

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

此式中 $c$ 為光速,質點之運動為下式所決定,

$$力=\frac{d}{dt}(m\,v).$$

若質點起初靜止後受 $F$ 之恆力之作用運動,求其運動如何?

# 第四章

## 常係數平直微分方程式

### 34　$n$級方程式. (Equations of the $n$th Order.)

若解 $n$ 級微分方程式中所有最高級之微係數,其式可簡化如下:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x,\ y, \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \cdots\cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34a)$$

欲求 $y$ 之值須作 $n$ 次積分法,故通解含 $n$ 個積分常數.

設下式爲一解,

$$y = F(x,\ c_1,\ c_2 \cdots\cdots c_n) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34b)$$

$c_1,\ c_2, \cdots\cdots c_n$ 常數之函數亦爲常數,若不能以如此之新常數代 $c_1,\ c_2, \cdots\cdots c_n$ 以表 $y$ 爲 $x$ 及少於 $n$ 常數之函數,則 $c_1, c_2 \cdots\cdots c_n$ 稱爲獨立常數.在如 (34$a$) 式之代數方程式,可證明兩含 $n$ 獨立常數之解,當常數有任何可能之値時,則所表全積分曲線系相同.故兩解爲等値者,而依此義任何含 $n$ 獨立常數之解可取爲通解.

因有可利用之 $n$ 隨意常數.通常可得適合於 $n$ 原始條件之特解.例如通常可得過一定點,且在該點第一$(n-1)$個微

係數有已定之值的曲線.若所取之值令若干函數爲不定者,或所生之方程式爲不相容者,則自然發生例外款.

微分方程式可有非爲通解之特款的解,例如§21中初級方程式之交跡線,然而如此之解常不含$n$獨立常數,故在有$n$隨意原始條件之問題中,非爲所欲求之解.

**35. 常係數平直方程式.(Linear Equations with Constant Coefficients.)**

如下之微分方程式稱爲平直者.

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (35a)$$

此乃上式爲含一變數(此式內爲$y$),及其各微係數之一次方程式之義.若$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$各係數爲常數,此式則稱爲常係數平直方程式.在實際上此爲最重要類中之一.

討論常係數平直方程式爲方便起見,以單一字母$D$表示$\frac{d}{dx}$運算.

則 $$\frac{dy}{dx}=Dy, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=D^2y.$$

(35$a$)可書爲

$$(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35b)$$

此乃設下演算:

$$P(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35c)$$

作在$y$上,則效果爲$f(x)$之義,此運算含有$n$次,$n-1$次等,求$y$之微係數.結果以1, $a_1$, $a_2$等乘之,後相加.欲解上式須求$y$函

數,在其上作微分法運算(35c),則化爲 $f(x)$.

對於微分方程式有下相關之代數方程式.

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35d)$$

此式中之各係數與(35a)式者同,但右端爲零.(35d)式稱爲(35a)式之輔助方程式(auxiliary equation).若其根爲 $r_1, r_2,\cdots\cdots r_n$,則由代數學有下多項式:

$$P(r)=r^n+a_1r^{n-1}+\cdots\cdots+a_n.$$

可劈如下:

$$P(r)=(r-r_1)(r-r_2)\cdots\cdots(r-r_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(35e)$$

此乃右邊諸因數相乘,而乘積諸項依 $r$ 之各冪排列之,結果恆等於 $P(r)$ 之義.此式中可以 $D$ 代 $r$,則得

$$P(D)=(D-r_1)(D-r_2)\cdots\cdots(D-r_n)\cdots\cdots\cdots\cdots(35f)$$

因(35$f$)式之右端展開式與 $P(r)$之異點,僅在各處以 $D$ 代 $r$ 而已.於是(35b)微分方程式可書爲

$$(D-r_1)(D-r_2)\cdots\cdots(D-r_n).y=f(x)\cdots\cdots\cdots\cdots(35g)$$

實行運算,則得

$$(D-r_1)y=\frac{dy}{dx}-r_1y.$$

在此式上以 $(D-r_2)$ 運算,

得
$$(D-r_2)[(D-r_1)y]=(D-r_2)\left(\frac{dy}{dx}-r_1y\right)$$
$$=\frac{d^2y}{dx^2}-(r_1+r_2)\frac{dy}{dx}+r_1r_2y.$$

若以下乘積

$$(D-r_1)(D-r_2)=D^2-(r_1+r_2)D+r_1r_2.$$

在 $y$ 上直接運算,則得同一結果.同法可證明以任何數之 $(D-r_1)$, $(D-r_2)$ 等因數陸續的運算,所生之結果與因數之次序無相關,且與以諸因數之相乘積直接運算時所生者相等.

因上性質,故可使用微分算子 (differential operators), 如同含數量之代數式,但當注意 $r_1$, $r_2$ 等必爲常數,此法方可適用.例如若 $r_1$,$r_2$ 變,則下式

$$(D-r_1)[(D-r_2)y]=(D-r_2)[(D-r_1)y].$$

大抵非眞確.

## 36. 右端爲零之方程式.

欲解

$$(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36a)$$

設 $r_1, r_2,\cdots\cdots r_n$ 爲下輔助方程式之根,

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}r+a_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36b)$$

上記號算子可劈因數,故微分方程式可書如下:

$$(D-r_1)(D-r_2)\cdots\cdots(D-r_n)y=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36c)$$

$$y=c_1e^{r_1x},$$

爲一解,此 $c_1$ 爲任何常數.因

$$(D-r_1)c_1e^{r_1x}=c_1\,r_1\,e^{r_1x}-r_1\,c_1\,e^{r_1x}=0,$$

且 (36c) 式可書

$$(D-r_2)\cdots\cdots(D-r_n)\cdot(D-r_1)y=(D-r_2)\cdots\cdots(D-r_n)\cdot 0=0.$$

同樣 $y=c_2e^{r_2x}$, $y=c_3e^{r_3x}$, 等式皆爲原式之解.終局

則

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\cdots\cdots+c_ne^{r_nx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36d)$$

爲解.因在此 $y$ 之值上運算所生之結果,爲在 $c_1e^{r_1x}$, $c_2e^{r_2x}$,等式上運算之結果(皆等於零)之和.

若 $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$ 常數皆不同,則(36$d$)式含 $n$ 個獨立常數,故爲(36$a$)式之通解.

然而若 $r_1$, $r_2$ 兩根相等,則

$$c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}=(c_1+c_2)e^{r_1x},$$

而此式只含 $(c_1+c_2)$ 單一常數,且(36$d$)含少於 $n$ 個獨立常數,但在此款中 $xe^{r_1x}$ 亦爲一解.

因 $$(D-r_1)xe^{r_1x}=r_1xe^{r_1x}+e^{r_1x}-r_1xe^{r_1x}=e^{r_1x},$$

而 $$(D-r_1)(D-r_2)xe^{r_2x}=(D-r_1)^2xe^{r_1x}=(D-r_1)e^{r_1x}=0.$$

是以若

$$r_2=r_1,$$

解中相當於此兩根之部分爲

$$(c_1+c_2x)e^{r_1x},$$

通論若

$$r_1=r_2=r_3=\cdots\cdots=r_m,$$

解中相當於諸根之部分爲

$$(c_1+c_2x+c_3x^2+\cdots\cdots+c_mx^{m-1})e^{r_1x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36e)$$

欲解下微分方程式

$$(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=0.$$

求
$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}r+a_n=0.$$

輔助方程式之 $r_1, r_2\cdots\cdots r_n$ 諸根,若該根各不相等,則解爲

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\cdots\cdots+c_ne^{r_nx}.$$

但若 $r_1, r_2, \cdots\cdots r_m$, $m$ 個根相等,解中相當之部份爲

$$(c_1+c_2x+\cdots\cdots+c_mx^{m-1})e^{r_1x}.$$

例 1.
$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=0.$$

此與下式同値,

$$(D^2-D-2)y=0.$$

輔助方程式之根爲 $-1$ 及 2,故解爲

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}.$$

例 2.
$$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3y=0.$$

輔助方程式可劈如下:

$$r^3+r^2-5r+3=(r-1)^2(r+3)=0.$$

故其根爲 $1, 1, -3$,解中相當於兩相等根 $(1, 1)$ 之部份爲

$$(c_1+c_2x)e^x,$$

屬於 $-3$ 根者爲

$$c_3e^{-3x}.$$

於是
$$y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-3x}.$$

## 37　虛根. (Imaginary Roots.)

若 $r_1, r_2$ 等根中有虛數者,則 (36 $d$) 及 (36 $e$) 兩解仍眞確,但

其形式或不便用．若$a_1, a_2 \cdots\cdots a_n$諸係數爲實,則虛根之數必爲偶數．如下兩虛根

$$r_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad r_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

則 $$c_1 e^{r_1 x}, \qquad c_2 e^{r_2 x},$$

兩項或爲虛,但其和爲實,此兩項可以無虛形狀之他式代替之．

此代替法可利用尤拉氏(Euler)方程式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

此式中$i$爲$\sqrt{-1}$,欲證明上式可用馬氏(Maclauru)定理展開兩邊如下:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

以$i\theta$代$x$,而用

$$i^2 = -1, \ i^3 = -i, \ i^4 = 1 \text{ 等式},$$

則得 $$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{\underline{|2}} + \frac{(i\theta)^3}{\underline{|3}} + \frac{(i\theta)^4}{\underline{|4}} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{\underline{|2}} + \frac{\theta^4}{\underline{|4}} - \cdots\cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{\underline{|3}} + \frac{\theta^5}{\underline{|5}} - \cdots\cdots\right).$$

因$\cos\theta$, $\sin\theta$之馬氏展開式如下:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{\underline{|2}} + \frac{\theta^4}{\underline{|4}} - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\underline{|3}} + \frac{\theta^5}{\underline{|5}} - \cdots\cdots\cdots\cdots$$

是以
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

設
$$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta.$$

則
$$e^{r_1 x} = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$
$$e^{rx} = e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

由此
$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = e^{\alpha x}[(c_1+c_2)\cos\beta x + i(c_1-c_2)\sin\beta x]$$
$$= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

上式中　$A = c_1 + c_2,\ p = i(c_1 - c_2),$

若取 $c_1, c_2$ 相當之值,則可使 $A, B$ 兩常數有任何隨意之值.故 $A, B$ 為隨意常數,可用 $c_1, c_2$ 記法表示之.

所以解中相當於
$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta.$$
兩虛根之部分可以
$$e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x]$$
代替之.

例 1.
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

輔助方程式
$$r^2 + r + 1 = 0$$
之根為
$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

在此式中

$$\alpha=-\frac{1}{2},\qquad \beta=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

故 $$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)+c_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right].$$

例 2. $$\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=0.$$

$$r^3+4r=0$$

式之根爲 $r=0$ 及 $r=\pm 2i.$

因 $\alpha=0$, 且 $e^{0\cdot x}, =e^0=1,$

故 $$y=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x.$$

## 38. 右端爲 $x$ 之函數的方程式.

設 $(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=0$ ………………………(38 a)

式之通解爲 $y=u.$

又設 $(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x)$ ………………(38 b)

式之任何解爲 $y=v.$

則 $y=u+v$

式爲 (38 b) 式之解. 因下運算

$$P(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n.$$

作在 $u$ 上時其結果爲零, 作在 $v$ 上時其結果爲 $f(x)$.

故 $$P(D)\cdot(u+v)=P(D)\cdot u+P(D)\cdot v=f(x),$$

此乃證明 $(u+v)$ 爲 (38 b) 之解.

$u$ 旣含 $n$ 個獨立常數, $(u+v)$ 亦含 $n$ 個獨立常數, 是以 $y=u+v$ 爲 (38 b) 之通解.

此通解中之$u$部分稱爲補函數(complementary function), $v$部分稱爲特解(particular integral). 前已詳解右端爲零的方程式之完全方法,因此可求補函數.欲解右端爲$x$之函數的方程式,另外只須求特解,此特解乃爲適合於下全方程式之任何$v$函數.

$$(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n)v=f(x).$$

若以視察法或試驗法可得任何如$v$之函數,

則 $$y=u+v$$

爲所求之通解.

例 1. $$\frac{d^2y}{dx^2}-y=2.$$

欲得補函數解下式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=0.$$

輔助方程式之根爲 1, −1.

故 $$u=c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

特解爲適合於

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=2$$

式$y$之任一值.因常數之微係數爲零,

故 $$y=-2$$

自能適合上式,是以爲特解可取

$$v=-2.$$

通解則爲

$$y=u+v=c_1e^x+c_2e^{-x}-2.$$

例 2. $$\frac{dy}{dx}+4y=e^{2x}.$$

解下式

$$\frac{dy}{dx}+4y=0.$$

則得補函數爲

$$u=ce^{-4x}.$$

求解須求適合於下全式 $y$ 之一值,

$$\frac{dy}{dx}+4y=e^{2x}.$$

因 $e^{2x}$ 之微係數僅爲 $e^{2x}$ 之倍數,可試用

$$y=Ae^{2x}.$$

以此值代 $y$, 上式化爲

$$2Ae^{2x}+4Ae^{2x}=e^{2x}.$$

若 $$6A=1,\qquad A=\frac{1}{6}.$$

此式爲 $y$ 之值所適合,於是一特解爲

$$v=\frac{1}{6}e^{2x}.$$

而通解爲

$$y=ce^{-4x}+\frac{1}{6}e^{2x}.$$

**39. 未定係數法. (Method of Undetermind Coefficients.)**

上解之例題表明算學上所稱爲未定係數法,答案之總式已知,但精確係數未知時,用此法,在該式內用文字係數並代替後,求該係數適合於所設方程式時所必須有之值.

例如求下平直方程式之特解:

$$(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x).$$

設試以何種函數代$y$時,可使左邊之項與$f(x)$中之項爲同類者.設該函數之常係數一次函數爲$y$之試驗值,代入微分方程式而求使兩邊相等各係數之值.

若$f(x)$爲若干項之和,而其各項只有有限數個一次獨立的(linearly independent)微係數,上法可常使用,實際應用上所生之平直方程式

(設$U_1(x)$, $U_2(x)\cdots\cdots U_m(x)$諸函數,若$x$有任何值時,令$c_1U_1+\cdots\cdots c_2U_2+\cdots\cdots c_mU_m=0$之$c_1, c_2\cdots\cdots c_m$常數不存在,則稱爲一次獨立函數.)

適合於此條件,例如若

$$f(x)=e^{2x}+\sin 3x.$$

$e^{2x}$項之第一,第二及高級微係數皆爲$e^{2x}$之倍數,且$\sin 3x$之諸微係數皆爲$\sin 3x$或$\cos 3x$之倍數,在此款中當先預備在$f(x)$及其諸微係數中所含各一次獨立函數表,前款中此表只含下三函數:

$$e^{2x},\qquad \sin 3x,\qquad \cos 3x.$$

若此表內之函數皆非爲補函數之項,則可得一特解爲

上諸函數之常係數一次函數.例如上款中之特解爲

$$y=Ae^{2x}+B\sin 3x+\cos 3x.$$

若以 $y$ 之假定值代入微分方程式後,以兩邊內同函數之係數比較,則可見上法成功之原因,因可得若干函數其數與方程式數相等,故此數等於未定常數之數,足以解諸常數.

若上表內之函數有含在補函數中者,則當假定值代入微分方程式時,該函數卽失去,而前所述之程序亦無效.在此款中則整列集合該函數,其每組內之諸項由 $f(x)$ 中一項以微分法作成之.例如前例題中有兩組如下:

$$e^{2x},$$

及 $$\sin 3x, \quad \cos 3x.$$

若一組中之任一項含在補函數內,則以 $x$ 之最低乘方乘該組之諸項(此 $x$ 之乘方必使各項與補函數中之任何項相異),以新項代替原項以作成特解.

如設上例中之補函數爲

$$u=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x.$$

因 $\sin 3x$, $\cos 3x$ 兩項含在補函數內,故當取

$$y=x(A\sin 3x+B\cos 3x)+ce^{2x}.$$

爲一特解.如此之款運算完畢時,則知所加入之 $x$ 乘方被消去,而係數可如前得之.

例 1. $$\frac{dy}{dx}+y=\sin x.$$

補函數爲

$$u=ce^{-x}.$$

若任何次求 $\sin x$ 之微分所得之函數只有 $\sin x$, $\cos x$,因此兩函數皆不在補函數內.

取 $$y=A\sin x+B\cos x$$

代入原式,則得

$$(A+B)\cos x+(A-B)\sin x=\sin x.$$

以兩邊內同函數之係數比較,

$$A+B=0,\qquad A-B=1.$$

$$A=\frac{1}{2},\qquad B=-\frac{1}{2}.$$

故特解爲

$$v=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x),$$

而通解爲

$$y=ce^{-x}+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x).$$

例 2. $$\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=x^2+2x+e^x.$$

補函數爲

$$u=c_1+c_2x+c_3e^{-x}.$$

由 $x^2$, $x$ 兩函數及其微係數得特解中之項如下:

$$Ax^2+Bx+C.$$

因 $Bx$ 及 $C$ 含在補函數內,以 $x^2$ 乘上式,

得 $$x^2(Ax^2+Bx+C).$$

$e^x$項不在補函數內,且求其微分時不生新項,於是欲求一特解.

設 $$y=Ax^4+Bx^3+Cx^2+De^x,$$

代入微分方程式,則得

$$12Ax^2+(24A+6B)x+6B+2C+2De^x=x^2+2x+e^x.$$

比較相當之係數

$$12A=1, \qquad 24A+6B=2,$$

$$6B+2C=0, \qquad 2D=1.$$

故 $$A=\frac{1}{12}, \qquad B=C=0, \qquad D=\frac{1}{2}.$$

而通解爲

$$y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}e^x.$$

## 40. 聯立平直方程式. (Simultaneous Linear Equations.)

解含單一自變數之聯立平直微分方程式,可用消元法.此法與代數學上解平直方程式所用者相似,若變數之數等於方程式數,則除其一以外皆可消去,欲求其值可解該方程式後代入其前方程式得他變數之值.

如可能時當整列運算次序,使第一變數之值得後可無用積分法而得他變數者.若以積分法求該他變數,則積分常數未必皆爲隨意者.如此則須以所得諸值代入各微分方程式決定常數間之關係.

例
$$\frac{d^2x}{dt^2}-3x-y=e^t,$$

$$\frac{dy}{dt}-2x=0.$$

以 $D$ 代表 $\frac{d}{dt}$,上式可書

$$(D^2-3)x-y=e^t,$$

$$-2x+Dy=0.$$

以 2 乘第一式,以 $(D^2-3)$ 乘第二式,

則得
$$2(D^2-3)x-2y=2e^t,$$

$$-2(D^2-3)x+(D^2-3)Dy=0.$$

相加
$$(D^3-3D-2)y=2e^t.$$

此式只含一因變數,可解 $y$,

得
$$y=(C_1+C_2t)e^{-t}+C_3e^{2t}-\frac{1}{2}e^t.$$

以此值代入第二方程式.

則
$$x=\frac{1}{2}Dy=\frac{1}{2}[(c_2-c_1)-c_2t]\,e^{-t}+c_3e^{2t}-\frac{1}{4}e^t.$$

## 習　題

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=0.$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-3y=0.$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=0.$

4. $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=0.$

5. $\frac{d^2y}{dx^2}+8\frac{dy}{dx}+16y=0.$

6. $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-y=0.$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0.$

8. $\frac{d^4y}{dx^4}=y.$

9. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0.$

10. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-5y=0.$

11. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=x.$

12. $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=2e^x.$

13. $\frac{dy}{dx}-y=x^2.$

14. $\frac{dy}{dx}+y=1+\cos x.$

15. $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+3y=x+e^{2x}.$

16. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=x+1.$

17. $\frac{dy}{dx}-y=e^x.$

18. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\cos 2x.$

19. $\frac{d^2y}{dx^2}-a^2y=e^{ax}.$

20. $\frac{d^2y}{dx^2}-9y=e^{3x}\cos x.$

21. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=e^x+e^{-x}.$

22. $\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^3y}{dx^3}=e^x+1.$

23. $\frac{dx}{dt}=y+1,\ \frac{dy}{dt}=x+1.$

24. $\frac{dx}{dt}=x-2y,\ \frac{dy}{dt}=x-y.$

25. $4\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+3x=\sin t,\ \frac{dx}{dt}+y=\cos t.$

26. $\frac{d^2y}{dt^2}=x,\ \frac{d^2x}{dt^2}=y.$

27. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+x=e^t,\ \frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}=1.$

28. $(D+1)y=x^2-x$ 式之一特解,可以下法得之,書上式如下:

$$y=\frac{1}{1+D}(x^2-x)=(1-D+D^2-D^3+\cdots\cdots)(x^2-x).$$

而求所提示之微分,證所生之結果爲眞確.

29. 以前題之法解

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^4.$$

30. $\frac{dy}{dx}=f(x)$ 方程式,其解以積分式表之而求

$$y=\frac{1}{D}f(x)\text{ 之值.}$$

31. 以 §18 内之方法解

$$\frac{dy}{dx}-ay=f(x).$$

($a$ 爲常數)而求

$$y=\frac{1}{D-a}f(x)\text{ 之值.}$$

32. $\frac{d^2y}{dx^2}-y=e^x.$

書其解如下以解上式,

$$y=\frac{1}{D^2-1}f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{D-1}-\frac{1}{D+1}\right]f(x),$$

並用前題之結果.

33. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}=e^x.$

書其解如下連續運算而得之.

$$y=\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D-1}\cdot e^x\right).$$

34. $(D-2)(xD+1)y$ 及 $(xD+1)(D-2)y$

不相等,試證之.

35. $x\frac{d^2y}{dx^2}+2(1-x)\frac{dy}{dx}-2y=0.$

簡化此式如下:

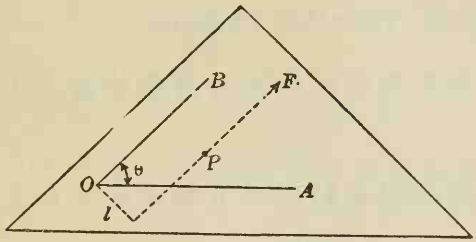
$$(D-2)(xD+1)y=0.$$

取 $$z=(xD+1)y$$

爲新變數而解之.

## 41. 繞定軸之旋轉.

設物體(圖 41)繞過 $O$ 點垂直於 $AOB$ 平面之軸旋轉,物體之位置可由定線 $OA$ 與在物體內定線 $OB$ 所成之 $\theta$ 角決定之.




(圖 41)

轉動之角速爲

$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \qquad (41\,a)$$

其角加速爲

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (41\,b)$$

設 $F$ 爲在 $P$ 點作用於物體上之力,此力作用在 $AOB$ 平面內,此力所生繞旋轉軸之扭力爲

$$T=Fl.$$

此式中 $l$ 爲 $O$ 點與 $FP$ 線之垂直距離,$F$ 力生沿 $\theta$ 正方向之轉動時扭力爲正.

此扭力及角加速適合於下式:

$$T=I\alpha \quad \cdots\cdots (41\,c)$$

此式中 $I$ 爲繞旋轉軸之惰性矩, $T$ 爲作用於物體上諸力之總扭力,上式與下式相似.

$$F=ma,$$

惰性矩與質量相應,扭力與力相應.

**42. 振動系. (Vibrating Systems.)**

使物體與安定平衡位置有稍變位時,卽以該位置爲中心作振動.

若不計抵抗,則運動微分方程式通常如下:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0.$$

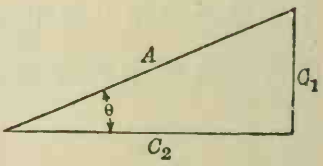
此式中 $x$ 爲變位 (displacement), $t$ 爲時間, $k$ 爲常數, 以前法上式之解可得如下:

$$x=c_1\cos(kt)+c_2\sin(k^2t).$$

然而在若干情形之中,書如下式更爲方便.

$$x=A\sin(kt+\theta) \quad \cdots\cdots (42\,a)$$

欲表明上兩式之同值,設 $C_1$, $C_2$ 爲斜邊 $A$ 底角 $\theta$ 之直角三角形的兩邊 (42 $a$).



(圖 42 $a$)

則 $C_1=A\sin\theta,\ C_2=A\cos\theta.$

而 $C_1\cos kt+C_2\sin kt=A(\cos kt\sin\theta+\sin kt\cos\theta)=A\sin(kt+\theta).$

因正弦不能大於1,故 $A$ 爲 $x$ 之最大值,稱爲振動之振幅(amplitude). 下量

$$(kt+\theta),$$

爲表示變位所用之角 $\theta$ 爲此角當 $t=0$ 之值在完全振動中(來回),此角增加 $360°$ 或 $2\pi$, 振動時間或週期(period) $T$ 乃爲使 $(kt+\theta)$ 角生 $2\pi$ 變化, $t$ 所需之增量,即

$$T=\frac{2\pi}{k},$$

在運動之圖示中平常不見 $(kt+\theta)$ 角.

若抵抗力與速度爲正比,則變位通常由如下之方程式決定之.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0.$$

$a, b$ 爲常數,此式中之解可簡化如下:

$$x=Ae^{-\alpha t}\sin(\beta t+\theta) \cdots\cdots (42b)$$

$A, \alpha, \beta, \theta$ 皆爲常數,在振動之一極端,上式中之正弦爲一,而振幅爲

$$Ae^{-\alpha t},$$

當時間增大,此振幅減少;是以此種運動,稱爲減衰振動(damped vibration).

有時得如下之微分方程式:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+k^2\sin\theta=0.$$

此非爲平直方程式,但若以$\theta$代$\sin\theta$則成爲平直者,$\theta$小時此爲適宜近似計法.例如當角爲5°,

$$\sin\theta = \cdot 08716,$$

$$\theta = \cdot 08727.$$

此相差小於800分之一,即是角爲10°時所生之差錯僅爲約0.5%.

例　質量$m$之質點及長$l$之弦所作成的擺子在某質中作擺動,某質之抵抗力與速度爲正比,求擺動週期爲何?

$m$之重量所生繞懸點之扭力爲

$$-mgl\sin\theta,$$

因$\theta$爲正時,扭力易減少$\theta$之值,故上用負號.$m$之速度爲

$$v=l\frac{d\theta}{dt},$$

當時之抵抗力爲

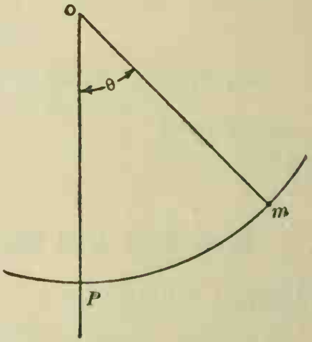
$$kl\frac{d\theta}{dt},$$

此抵抗力所生之扭力爲

$$-kl\frac{d\theta}{dt}\cdot l$$

$\frac{d\theta}{dt}$爲正時,扭力爲負,故上用負號.

$m$繞0點之惰性矩爲$ml^2$,



(圖 42 b)

於是　$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=T$　方程式

爲　$$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mgl\sin\theta-kl^2\frac{d\theta}{dt},$$

以 $\theta$ 代 $\sin\theta$, 則上式成爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

此方程式之解如下:

$$\theta=Ae^{-\frac{kt}{2m}}\sin\left[t\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}+a\right].$$

是以擺動週期爲

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}}.$$

## 問　題

1. $$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt.$$

簡化上式爲

$$x=A\cos(kt+\theta),$$

求 $A,\theta$ 爲 $C_1, C_2$ 之函數.

2. 質點沿直線運動,其與該線上之定點的距離爲

$$x=1+2\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right).$$

求其振動週期爲何?

3. 質點之運動爲下方程式所決定:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+4x=0.$$

求振動週期及振幅至何時方爲其初值之一半.

4. 螺形彈簧之力與其伸長爲正比,其伸長半吋時力

卽爲2磅重,質量5磅之物體爲彈簧所懸,若微壓下後放之,求振動週期若何?

5. 圓柱浮標在水內直立,其直徑爲12吋,重量200磅,若微壓下後放之,求振動週期.

6. 半徑一呎之球浮在水內,其一半在水面下,若微壓下後放之,問振動週期如何?

7. 半徑$a$,質量$M$之圓片橫平,在其中心點爲垂直弦所懸,圓片繞垂直軸旋過$\theta$角時,弦生扭力如下:

$$T=k\theta.$$

使圓片繞垂直軸作轉動時,則每秒作$n$次振動,問$k$常數若何?

8. 強度$H$之磁場在極強$M$之磁極上所作用之力爲$MH$,質量$m$,長$l$,極強$M$之磁針自由旋轉於水平面,試驗時針作振動每秒鐘$n$次過$N$——$S$線,求地磁場之$H$水平分強度.

9. 管形如$U$字母,有半徑6吋之半圓,上邊有垂直部份,半圓形部份滿液體,若管一邊之液體表面微壓下後放之,求振動週期爲何?不計摩擦.

10. 長$2l$之桿爲長$l$之垂直弦,在其兩端所懸而橫平,若使桿繞過其中心之垂直軸旋過小角後放之,問振動週期若何?

11. 長$2l$之桿橫平支於半徑$a$圓柱上,若使桿微傾側後放之,求振動週期爲何?

12. 自然長 $a$ 之彈弦,一端定於橫平棹子上之定點,他端拴質量 $m$ 之質點,若拖 $m$ 往一邊使弦生 $a$ 伸長後放之,求振動週期如何?設 $P$ 磅重之力生弦之一呎伸長.

13. 試驗上質量10磅之物體,每分鐘作90次的振動,振動減衰過15秒振幅減少一半,設抵抗力與速度爲正比,求運動微分方程式.

14. 質量 10 磅之物體受與其變位爲正比之歸還力 (restitutive force) 的作用,變位爲1呎時,此力爲2磅重;若振動減衰,過三次完全振動,振幅爲初幅 $\frac{1}{10}$, 求振動週期爲何?

15. 過自感係數 $L$ 之線輪的電動力爲 $L\frac{di}{dt}$,過電阻 $R$ 之導體者爲 $Ri$, 過電容 $C$ 之蓄電器者爲

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt.$$

此式中 $i$ 爲電流, $t$ 時間自蓄電器放電時計,線輪,導體及蓄電器相串聯;若使小電流起於電路中後取去外電動,求所生振動之振次.

16. 若前題中電阻爲負,則小振動之振幅無限漸增,試證之.此爲含眞空管之電路重要情形.

17. 同質量 $m$ 之兩物體,一沿 $x$ 軸,一沿 $y$ 軸強迫運動;若起初靜止在 $x=a$, $y=b$ 二點且相力等於相隔距離與 $k^2m$ 之乘積,求其等運動如何?

18. 質量 $m$ 之質點受向兩中心之引力,力之大小爲距離與 $k$ 之乘積;若兩中心相隔 $2b$ 距離,而質點起初靜止在兩

中心連線上,距其中心點$C$距離之點,求運動若何?

19. 若前題中質點,起初以$v_0$速度垂直於兩中心之連線作運動,問運動若何?

20. 横平管以$\omega$角速繞垂直軸轉動,管內之球不受摩擦力而滑動,其自中心以$v_0$速度開動,求運動如何?

21. 質量4磅之物體為彈簧所懸,物體使彈簧伸長1吋;若使簧之上端作下式所表示之諸動:

$$y=\sin(\sqrt{12g}\cdot t).$$

物體振動之振幅漸增,證明之.此為共振(resonance)之一種.

22. 長$l$質量$m$之弦一端繫住,而在水平面上以$\omega$角速作轉動;若弦受$F$力作用時伸長$klF$,距離,求因離心力之作用其伸長為何?

23. $i$電流通電阻$R$之導線時,電壓力降下為$Ri$,$E$電壓力施於$G$逸散係數(leakance)之境域上時,逸散之電流為$EG$.若水電線單位長度之電阻為$r$,單位長度之逸散係數為$g$,$l$長之線一端必收何電流及何電壓力,方使他端之電流電壓力為$I_0$, $E_0$.

24. 長$2l$之長柱為建築之一部分,柱在其底邊及中心點不能沿水平方向移動,但在該兩點可自由旋轉,問其可荷之最大重為何?

25. 前題中若柱在中部定住不能作水平運動,亦在底邊定住不能作垂直運動,問最大荷重若何?

# 答　案

[8頁]

1. $\tan^2 x - \cot^2 y = c.$

2. $1+y^2=c(1-x^2).$

3. $\log(xy)+y=c.$

4. $x=a\sin(y+c).$

5. $y+a=c\sin x.$

6. $r^2=a^2\sin(2x+c).$

7. $y(1+cx)=1.$

8. $e^{2x}+e^{2y}=c.$

9. $x=\log\frac{c}{e^y-1}.$

10. $x+y=c(1-xy).$

[6—7頁]

1. $y^2=cx.$

2. 平圓.

3. $y^2=2ax+c.$

4. $xy=c.$

5. $y^2+2x^2=3.$

6. $x^2-2y^2=c.$

7. $r=ae^{\theta\cot a}.$

8. $2V_0^2h=gx^2$, 取起點爲原點, $x$軸爲橫平.

9. 中心在原點之平圓及過原點之平圓.

10. $y=ce^{kx}.$

11. $y^2=cx$ 或 $x^2=cy.$

12. $x^2=cy.$

13. 球面.

14. $r^2=k\theta.$

15. $r=ce^{k\theta}.$

16. 中心在光點之球面或

$$r^2=a\sin 2\theta.$$

曲線繞過原點之直線旋轉生成之曲面.

[30—36頁]

1. 約5.66倍初分量.
2. $Q=ce^{-kt}$.
3. $r=-kt+c$.
4. 一小時.
5. 56.5.
6. 6.6日.
7. 6.18%.
8. \$105.900.
9. \$23.630.
10. $\frac{1}{2}k\,lw$.
11. 9.8分鐘.
12. 10.2分鐘.
13. 4分鐘.
14. 18.4分鐘.
15. 69.9兛.
16. 9.76兛.
17. 27.36兛
18. 99.5%.
19. 461日.
20. 1500立方呎.
21. 0.24%.
22. 0.125%.
23. $T=\frac{2}{3}x$, 失散熱量 = 864,000卡.
24. $T=592-187.6\log r$, 失散熱量 =1,731,000卡.
25. 2,805,000卡.
26. 0.0005.
27. $c=\frac{as}{r}$.
28. $\frac{1}{1024}$.
29. 50分鐘.
30. 7.75兛.
31. 2.8磅.
32. 2.9日.
33. $r=x+c$.
34. 旋轉雙曲面.
35. $p=p_0e^{\frac{R(R-r)}{kr}}$, $k$ 爲波義耳定律之常數, $p=k\rho$.

38. $T_2 - \dfrac{wv^2}{g} = \left(T_1 - \dfrac{wv^2}{g}\right) e^{\mu\alpha}.$

40. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \log \dfrac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + c$ 曲線繞 $y$ 軸旋轉生成之曲面.

41. 25.6 秒.

42. 21.4 秒.

[51—53 頁]

1. $2xy + y^2 = c.$

2. $x^3 = 3xy + c.$

3. $x^3 + 3xy^2 = c.$

4. $x^3 + x^2y - y^2x - y^3 = c.$

5. $x = y \log y + cy.$

6. $y(1 + cx) = 1.$

7. $x^2 - y^2 = cx.$

8. $2 \tan^{-1} \dfrac{y}{x} + \log(x^2 + y^2) = c.$

9. $y = e^x(x + c).$

10. $y = cx^2 - \dfrac{1}{x}.$

11. $y = cx^2 e^{-\frac{3}{x}}.$

12. $x = ce^y + y + 1.$

13. $x^2y - x = cy.$

14. $y = c \sin^2 x - a.$

15. $x^4 + 4y(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = c.$

16. $\dfrac{1}{y^2} = x + \dfrac{1}{2} + ce.$

17. $7x^3 = y(x^7 + c).$

18. $y^4 - 4xy = c.$

19. $\log(x^2 + y^2) = 2 \tan^{-1} \dfrac{y}{x} + c.$

20. $y = \dfrac{1}{2} cx^2 - \dfrac{1}{2c}.$

21. $\log y + \sqrt{\dfrac{x}{y}} = c.$

22. $y = c\sqrt{\dfrac{x + 2y}{x}}.$

23. $y = \dfrac{1}{2} cx^2 - \dfrac{1}{2c}.$

24. $y = \dfrac{1}{2} x^2 + c$ 或 $y = ce^x.$

25. $x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2})\pm y^2=c.$

26. $y^2=\frac{2}{3}\sin x+c\cos c^2x.$

27. $x+2y+\log(x+y-2)=c.$

28. $x^3=ce^x-x-1.$

29. $e^y=e^x(x+c).$

30. $2e^y=e^x+ce^{-x}.$

31. $x+2y+3\log(2x+3y-7)=c.$

32. $x=y^2(c-e^{-y}).$

33. $e^{\frac{x}{y}}+\log x=c.$

34. $y\sin x+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}x^3=c.$

35. $y=\frac{1}{2}x(e^{x+c}-e^{-x-c}).$

36. $x=\frac{1}{2}e^t+c_1e^{-t},\ \ y=\frac{1}{2}e^t-c_1e^{-t}+c_2.$

37. $y=c_1e^{3t},\ \ x=c_2e^t-\frac{1}{2}c_1e^{3t}.$

38. $y=e^t(t+c_1),\ x=2e^t(t+c_1-1)+c_2.$

39. $x=c_1e^t,\ y=\frac{1}{2}c_1e^t+c_2e^{-t}.$

[53—57 頁]

1. $y^2=2cx+c^2$, 定點爲原點,定線平行於 $x$ 軸.

2. 7.45 兡.

3. $i=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}[R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}].$

4. $i=\frac{CE\omega}{1+C^2R^2\omega^2}[\cos\omega t+CR\,\omega\sin\omega t-e^{-\frac{t}{RC}}].$

5. $i_1 = \frac{1}{R^2 + L^2\omega^2} [(RR_2 + LL_2\omega^2) \sin \omega t$

$+ \omega(L_2R - R_2L)(\cos \omega t - e^{-\frac{R}{L}t})].$

此 $R = R_1 + R_2,\ L = L_1 + L_2.$

6. $p = p_0 + \frac{\rho\omega^2a^2}{2g}$, $\rho$ 爲單位體積之質量.

7. $p = ce^{\frac{\omega^2r^2}{2gk}}.$

8. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+c}{a}} + e^{\frac{-x+c}{a}}\right)$, 懸鏈線繞 $x$ 軸旋轉生成之曲面.

10. $\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = c.$

12. $x = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} [c - \log(u + \sqrt{u^2+1})],\quad u = \frac{M}{N}.$

13. $x = \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}),\ y = \frac{3}{4}(1 - 2^{-t}).$

14. $y = 4.5(1 - e^{-.7324t}),\ x = 10 - y.$

15. $B = 0.214,\qquad C = 0.249.$

[64—65 頁]

1. $y = \sin x + c_1x + c_2.$

2. $y = x\log x + \frac{1}{6}x^3 + c_1x + c_2.$

3. $y = c_1 \log x + c_2 - \frac{1}{4}x^2.$

4. $y = x + c_1 + c_2 \int e^{-\frac{1}{2}x^2} \partial x.$

5. $y=(1+c_1^2)\log(x+c_1)-c_1x+c_2.$

6. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}.$ 7. $y=c_1\cos(kx+c_2).$

8. $y=\dfrac{1}{2c_1}\left(e^{c_1x+c_2}+e^{-c_1x\ c_2}\right).$

9. $y=x+c_1xe^x+c_2.$

10. $x=\dfrac{1}{c_1}\log\dfrac{y+c_1}{y-c_1}+c_2.$

11. $y=x+c_1\left[x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right]+c_2.$

12. $y=c_1x^3-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{c_2}{x}.$

13. $y=\dfrac{1}{6}x\log(1+x^2)+c_1(1+x\tan^{-1}x)+c_2x.$

14. $y=c_1(x^3+3x^2+6x+6)+c_2e^x.$

[79—83 頁]

1. $EIy=\dfrac{1}{4}W(lx^2-\dfrac{1}{3}x^3)$, 中點爲原點.

2. $EIy=\dfrac{1}{2}W\left(\dfrac{1}{3}x^3-lx^2\right)$, 定端爲原點.

3. $EIy=-\dfrac{1}{24}w(6l^2x^2-4lx^3+x^4).$

4. $EIy=\dfrac{1}{48}w(-3l^2x^2+5lx^3-2x^4)$,梁長爲 $2l$.

5. 與 4 同,梁長爲 $l$. 6. $EIy=\dfrac{w}{24}(2l^2x^2-x^4)$

8. $P=\left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2EI.$ 9. 拋物線

10. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, 以相當之坐標軸.

11. 65.5 磅.

12. $y=c(e^{kx}+e^{-kx})$.

13. $y=c(e^{kx}+e^{-kx})$.

14. 拋物線.

15. $x=a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$.

17. $\frac{a^2}{k}$.

18. 約 7 秒哩.

19. $\frac{M}{4\pi\sqrt{2g}\cdot r^{\frac{3}{2}}R}$, $R$ 爲地球半徑.

20. 約 $42\frac{1}{2}$ 分鐘.

21. $S=\frac{V^2}{g}\log\left(\frac{e^{\frac{gt}{v}}+e^{-\frac{gt}{v}}}{2}\right)$.

22. $v_0\sqrt{\frac{mg}{mg+kv_0^2}}$.

23. $t=\sqrt{\frac{6}{g}}\log(6+\sqrt{35})$.

24. 11.5 秒呎.

25. $t=\frac{3}{\sqrt{g}}\log(17+4\sqrt{18})$.

26. 最大高度 48,500 呎, 射程 36.7 哩.

27. $x=\frac{mv_0\cos\alpha}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$,

$$y=\frac{m}{k^2}(kv_0\sin\alpha+mg)(1-e^{-\frac{k}{m}t})-\frac{mgt}{k}.$$

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{ky^2}{mv_0^2}=1$.

29. $\frac{x^2}{a}-\frac{ky^2}{mv_0^2}=1$.

30. $x=\frac{v_0cm}{eH}\sin\left(\frac{eH}{cm}t\right)$, $y=\frac{v_0cm}{eH}\left(1-\cos\frac{eH}{cm}t\right)$.

31. 螺線.

33. $r=a\cos\theta$.

35. $\frac{1}{r}=\left(\frac{1}{r_0}-\frac{k}{r_0^2v_0^2}\right)\cos\theta+\frac{k}{r_0^2v_0^2}$.

36. $\dfrac{2r_0}{1+\cos\theta}$.  37. 抛物線.

38. $S=\dfrac{C}{F}(\sqrt{c^2m_0^2+F^2t^2}-cm_0)$.

[99—103 頁]

1. $y=c_1+c_2e^x$.  2. $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}$.

3. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$.  4. $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}$.

5. $y=(c_1+c_2x)e^{-4x}$.  6. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x$.

7. $y=c_1\cos x+c_2\sin x$.

8. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x$.

9. $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$.  10. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}$.

11. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x$.  12. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\dfrac{2}{3}e^x$.

13. $y=ce^x-x^2-2x-2$.

14. $y=ce^{-x}+1+\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

15. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}+\dfrac{1}{15}e^{2x}+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{9}$.

16. $y=c_1+c_2e^x-\dfrac{1}{2}x^2-2x$.  17. $y=(c+x)e^x$.

18. $y=(c_1+\dfrac{1}{4}x)\sin 2x+c_2\cos 2x$.

19. $y=\left(c_1+\dfrac{x}{2a}\right)e^{ax}+c_2e^{-ax}$.

20. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+\dfrac{1}{37}e^{3x}(6\sin x-\cos x)$.

21. $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)e^{-x}+\dfrac{1}{4}e^x$.

22. $y=(c_1+x)e^x+c_2+c_3x+c_4x^2-\frac{1}{6}x^3.$

23. $y=c_1e^t+c_2e^{-t}-1,\ x=c_1e^t-c_2e^{-t}-1.$

24. $y=c_1\cos t+c_2\sin t,\ x=(c_1+c_2)\cos t+(c_2-c_1)\sin t.$

25. $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t},\ y=c_1e^{-t}+3c_2e^{-3t}+\cos t.$

26. $x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t,$

$y=c_1e^t+c_2c^{-t}-c_3\cos t-c_4\sin t.$

27. $x=c_1+c_2t+c_3t^2-\frac{1}{6}t^3+e^t$。

$y=c_4-(c_1+2c_3)t-\frac{1}{2}(c_2-1)t-\frac{1}{3}c_3t^3+\frac{1}{24}t^4-e^t.$

35. $y=\frac{1}{x}(c_1e^{2x}+c_2).$

[107—110 頁]

2. $T=20.$

3. $T=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$，過 0.6931 秒振幅減至一半.

4. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5}{3g}}.$

5. 2.24 秒.

6. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3g}}.$

7. $k=2\pi^2n^2Ma^2.$

8. $H=\frac{\pi^2n^2ml}{3M}.$

9. $T=\pi\sqrt{\frac{\pi}{g}}.$

10. $2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}.$

11. $\frac{2\pi l}{\sqrt{3ag}}.$

12. $(4+2\pi)\sqrt{\frac{m}{P}}.$

13. $\frac{d^2x}{dt^2}+.0924\frac{dx}{dt}+88.33x=0.$

14. 2.49 秒.

15. $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}.$

17. $x=a\cos kt,\ y=b\cos kt.$

18. $x=c\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$, 原點為兩中心連線之中點.

19. 沿橢圓之運動.

20. $r=\frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\omega t}-e^{-\omega t}\right).$

22. $l\left(\frac{\tan\theta}{\theta}-1\right)$, 此 $\theta=\omega\sqrt{kml}$.

23. $i=\frac{1}{2}\left(I_0+E_0\sqrt{\frac{g}{r}}\right)e^{l\sqrt{rg}}+\frac{1}{2}\left(I_0-E_0\sqrt{\frac{g}{r}}\right)e^{-l\sqrt{rg}}$

24. $P=1.358\left(\frac{EI}{l^2}\right).$

25. $P=1.566\left(\frac{EI}{l^2}\right).$

# 中西名詞索引


Acceleration, linear. 直線加速 70

angular. 角加速 103

Amplitude of vibration. 振動之振幅 105

Auxiliary equation. 輔助方程式 86

Beams, deflection of. 橫梁之彎曲 65—69

Bending moment. 彎力矩 67

Cable, equilibrium of. 纜之平衡 69

Change of variable. 變數之改易 48

Chemical reactions. 化學反應 56

Columns, deflection of. 圓柱之彎曲 80, 110

Complementary function. 補函數 93

Concentration. 濃度 22

Constants of integration. 積分常數 3

determination of. 常數決定法 12

of independent. 獨立者 59, 84

number of. 次數 84

Deflection of beams. 橫梁之彎曲 65—69

of columns. 圓柱之彎曲 80, 110

Density of air. 空氣之密度 29, 36

of sea water. 海水之密度 35

Determination of constants. 常數決定法 12

Differential relations. 微分之相關 26

Dissolving, rate of. 溶解率 22, 32—34

Drying, rate of. 乾燥率 34

Electric circuits. 電路 54

Equation of continuity. 連續性方程式 21

first order. 初級方程式 1—57

linear with constant coefficients. 常係數平直者 84—108

*n*th order. *n* 級者 84

second order. 二級者 58—83

Equilibrium of a cable. 纜之平衡 69

Exact equations. 適合方程式 37—39

First order equations. 初級方程式 1—57

exact. 適合者 37—39

higher degree. 高次者 46

homogeneous. 齊次者 43

integrating factors. 積分因數 39

linear. 平直者 40

reducible to linear. 可化爲平直式者 42

Flow of heat. 熱之流動 23, 36

of water from orifice. 流射孔之水流 20, 31—32

Friction of belt and pulley. 帶及輪之摩擦, 35, 36

of step bearing. 軸枕之摩擦 36

Schiele's pivot. 36

Geometrical problems. 幾何問題 10—12

Geometrical representation of a first order equation. 初級方程式之圖示 8—10
Gravitation. 萬有引力 56, 83
Growth of bacteria 細菌之增加 56
of yeast. 酵素之增長 30
Heat, flow of. 熱之流動 23, 36
Homogeneous equations. 齊次方程式 43—46
functions. 齊次函數 43
Imaginary roots. 虛根 89—92
Integral. 積分 4
Integration between limits. 定限積分法 19
Interest continuously. 複利, 20, 31
compounded. 時時算利 20, 31
Linear equations of first order. 初級平直方程式 40
Linear equations with constant coefficients. 常係數平直方程式 84—103
complementary function. 補函數 93—98
particular integral. 特解 93—98
symbolic operator. 記號算子 87
Motion in a straight line. 直線運動 70
in a plane. 平面運動 74
of the centre of gravity. 重心之運動 72
of a chain. 鏈之運動 73, 82
of a projectile. 射彈之運動 82
of an electron. 電子之運動 82, 83
Orbit of a planet. 行星之軌道 83
Order of a differential equation. 微分方程式之級 2
Ordinary differential equation. 全微分方程式 1
Orifice, flow from. 流射孔之水流 20, 31—32
Orthogonal trajectory. 直交曲線 11
Partial differential equation. 偏微分方程式 1
Particular integral. 特解 93
Pendulum, motion of. 擺子之運動 106
Polar coördinates. 極坐標 74, 75
Pressure of air. 空氣之壓力 29, 35
Radium, rate of decomposition. 鐳之分解率 18, 56
Rate of change. 變化率 18
Reflecter, elliptic. 旋轉橢圓面反光鏡, 23
hyperbolic. 旋轉雙曲面者 35
parabolic. 旋轉拋物面者 35, 53
Relativity. 相對論 57, 83
Rotation of a liquid. 液體之轉動 17, 54
of a rigid body. 固體之轉動 103, 104
Second order equations. 二級方程式 57—57, 58—83
immediately integrable. 直接可解者 59
linear. 平直者 62—64
not containing $x$. 非含 $x$ 者 61
not containing $y$. 非含 $y$ 者 60
Second order processes. 二次作用 24, 32—35
Separable equations. 可分離的方程式

1—36
Separation of variables. 離變數法 4
Simultaneous equations of first order. 聯立方程式初級者 50
linear with constant coefficients. 常係數平直者 98
Singular solutions. 奇解 48
Solution of a differential equation. 微分方程式之解 2
Undetermination coefficients. 未定係數 94—98
Velocity, linear. 直線速度 71
angular. 角速度 103
Ventilation. 通氣法 32, 33, 34
Vibrating systems. 振動系104—107

University of British Columbia Library

DUE DATE

| | |
|---|---|
| DEC 2 1 1982 | |
| JAN 1 7 REC'D | |
| Subject to Recall | |
| AUG 1 5 1985 | |
| AUG 2 2 REC'D | |
| SEP 2 2 1985 | |
| NOV 1 1 1985 | |
| renewed | |
| DEC 4 - REC'D | |
| | |
| | |
| | |
| | |

ET-6

ASIAN STUDIES
LIBRARY

UNIVERSITY OF B.C. LIBRARY
QA 304 W424 1930z
Wei fen fang ch_leng chu pu.
3 9424 03161 5088

Fiat lux
THE UNIVERSITY OF
BRITISH COLUMBIA
LIBRARY